



TITLE:

水質変化過程のモデル化とその応用に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

松岡, 譲

CITATION:

松岡, 譲. 水質変化過程のモデル化とその応用に関する研究. 京都大学, 1986, 工学博士

ISSUE DATE:

1986-03-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r5876>

RIGHT:

新 制
工
657
京大附図

水質変化過程のモデル化と その応用に関する研究

松 岡 讓

水質変化過程のモデル化と その応用に関する研究

松 岡 讓

目 次

緒 論	1
第Ⅰ編 水質変化過程のモデル化	5
第1章 溶解性物質の水質モデル	7
1.1 水質混合の基礎式とその一次元的取り扱い	7
1.2 非保存性水質の一次元解析	16
1.3 濃度変動の微視的解析	30
第2章 浮遊性物質の水質モデル	47
2.1 浮遊性物質の理論的取り扱いとその基礎方程式	49
2.2 浮遊性物質の鉛直方向一次元モデル	85
2.3 凝集破壊モデル	131
第Ⅱ編 水質変化過程のモデルに関する応用的研究	225
第1章 移流拡散モデルに関する応用的研究	227
1.1 水質分布の内挿法	227
1.2 汚濁源特性の解析	235
1.3 湖の水質流動モデル	245
第2章 富栄養化モデル	261
2.1 流動モデル	262
2.2 外部負荷モデル	266
2.3 湖水質変化の動力学	267
2.4 計算・検定	276
2.5 計算結果の検討	284
結 論	293
付節 水質変化過程の数理モデルにおける平均化操作の意義	297

緒 論

本研究は環境水域を中心に水系内での水質の混合・変化現象の数理モデル化に伴う諸問題を取り上げ検討を行ったものである。

水域内の水質の混合・変化現象を数理モデルによって表現し水質管理に利用しようとする試みは古くから存在した。それらのうち、1920年代にオハイオ川を対象に行われたStreeterとPhelpsによる汚濁負荷の河川への影響に関するモデルは数理モデルがもつべき簡明性、目的性及び有効性をそなえ、以後のモデル解析の出発点となったと言ってよい。次いで1950年代後半から始まった水質汚濁の急速な激化は、モデル開発に対する強力な動機を与え、同時に進行されていた水質現象に関する基礎研究と複雑な数値計算を可能にした計算機の発達によって水質モデルの長足の進歩を促した。それと共に水質管理におけるモデルの重要性も認識されるようになり、現在では不可欠なものと考えられるようになった。

以上のような進展を踏まえ、現在の水質モデルに対する期待には非常に大きいものがあるが、一方ではモデルが持つ問題点も少なからず存在し、これらの期待を満足するには今だ多大の努力を必要とすると考えられる場合も多い。水質モデルの現況・有効性に関する議論は今までにきわめて多くなされてきたが、これらを通じ実用的な見地から問題点が少く多数の水系に跨って適用が可能であるモデルとは流動が卓越する場にて保存溶解性物質あるいはBOD-DOなど比較的簡単な反応メカニズムを取り扱ったものに限られ、浮遊性物質あるいは生物（動・植物プランクトン、魚類、バクテリア及びビールスなど）に関しては今だ実用段階にないと考えられている。

以上の現状に対する理由には種々の点があげられるが、対象場の不均一性あるいは多重構造的性はその大なるものであろう。実際、空間的に均一であり卓越する機構が単一な現象に関し解析を行ったりその挙動予測を行ったりすることは、労力さえいとわなければ比較的容易なことであり問題も少ない。これに反し各種の現象が複雑に組み合わさっている場合には、そのもととなる各個の現象が良くわかっている場合においても、取り扱いに困難な点が生ずることが多分にある。したがってその複合現象の本質を大きな誤差なく表現する簡単な数

理モデルを作成することは、工学上大いに有用なこととなる。

以上の立場から、本研究としては水質変化過程を種々の素過程の総合系として捉え、各素過程のみならず、統一化のプロセス（process of organization）にも強い焦点をあてる。ここで問題となることは対象とする現象の統一体としてのレベルであり、そのレベルを中心にどの程度の範囲までの素過程を組み込むべきかと言う点である。しかし、本研究においてはこれに言及しない。これを行うにはモデルのみならず、モデル開発の目的、その効率を明確に把握する必要がある、本論文が対象としているモデル自体の開発にはなじまないものであろう。

このような視点に立ち、本研究では、水質変化過程において問題となる幾つかの点を取り上げ、一つ一つ検討を行っている。取り扱った範囲はきわめて基礎的なものから応用的観点が強いものまで様々であるが、特に前者に関しては第Ⅰ編に、後者に関しては第Ⅱ編にまとめられている。

まず第Ⅰ編第Ⅰ章においては溶解性物質の変化を記述する基礎式を取り上げその取り扱い上問題となる2つの点について検討を行う。その第1は反応性物質の移流拡散現象に関する次元解析である。溶解性物質のうち保存性あるいは弱保存性物質（混合時間に比べ反応時間がきわめて長いもの）に関しては、従来から多くの研究がなされ実用上ほぼ問題がない程度の知見が蓄積されてきたが、非保存性物質については今だ未解明な部分も多く、保存性物質に関する結果を拡張使用しているのが現状である。本章前半ではこの点について検討を加える。第2はモデルにて通常、平均化操作によって切り捨てられている乱流混合に伴う濃度変動である。第1.3節ではこの点について検討を加えている。

第2章においては浮遊性物質の変化を記述する基礎式を取り上げ、その実際場に対する適用を検討する。浮遊性物質は溶解性物質にくらべ沈降性、凝集性などの特性をもちそれらの性質が水質変化現象の主体となる場合も多い。本章ではこの2つの特性について現象を記述する数理モデルの開発及び室内実験による適合性検討を行っている。

第Ⅱ編第1章では移流拡散モデルに焦点をあて、実際場への応用の立場から問題となる点についての検討を行っている。その第1は水質分布の内挿である。従来から使用されてきた内挿法には移動平均法、スプライン法などがあるが、これらはいずれもその物理的根拠が明白ではなかった。これに対し第1.1節で

は移流拡散モデルに基づいた内挿法の提案を行なう。次の第 1.2 節では下流での水質変動を観測することによって上流汚濁源の諸特性推定を行う手法の提案を行っている。上下流の汚濁源特性・水質変動特性の変換に移流拡散モデルが使用される。第 1.3 節では移流拡散モデルの数値解法の一つとして有限要素法が取り上げられ、琵琶湖南湖への適用が試みられている。

第 2 章では水質変化過程のモデル化に関するもう一つの典型的な例である湖富栄養化モデルの開発を行っている。富栄養化現象においては移流拡散の他に生物化学的な反応が複雑な連鎖をなす。対象場としては我国の代表的な富栄養湖である霞ヶ浦西浦を取り扱う。

以上、本論文では水質変化過程の“数理モデル”の構成，開発，応用の各フェーズにわたり，種々の検討を行っている。取り扱った対象も保存溶解性物質から凝集性浮遊粒子・富栄養化因子物質など多岐にわたる。しかし，ここで共通して取り上げられた論点である

- Ⅰ) 平均化操作－空間的，時間的あるいは粒度軸上での平均化
- Ⅱ) 素過程への分割とそのパラメタリゼーション，及びそれらの総合化
- Ⅲ) 対象モデルに合った数値解析手法の開発

は本論文で取り扱った水質変化過程のモデルのみならず，実際場の水質変化を取り扱うにあたり多かれ少かれ問題となる点であり，そうした意味からも本研究は十分参考となろう。

第 1 編 水質変化過程のモデル化

第1章 溶解性物質の水質モデル

本章では水質の挙動が *passive* であり1次反応で表現できる場合の検討を行う。取り上げる問題は2点である。その第1は非保存性物質（一次反応物質に限定）の移流分散論である。その第2は通常の水質モデルでは無視している乱流混合による濃度変動の挙動解析である。その他，本章では上記2点の解析に先立って水質混合の基礎式及びその一次元的取り扱いについて概説している。本章で明らかにされる点は次の通りである。

- 1) 移流分散理論のラグランジュ拡散理論に立った解析法を導出する（第1.1節）。
- 2) 反応性物質（一次反応性物質）の移流分散現象に対する解析を行い保存性物質との違いを明確にする（第1.2節）
- 3) 水中での乱流拡散に伴う水質濃度変動の諸特性を整理し，実験・実測との対比を行う（第1.3節）

1.1 水質混合の基礎式とその一次元的取り扱い

流体中の単位体積当りに含まれる水質の量を c とすると，質量保存則から c に関する変化の式として

$$\frac{Dc}{Dt} = -\nabla \cdot F + R \quad (1.1.1)$$

を得る。ここに D/Dt は流体運動に伴う実質微分であり

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1.2)$$

である。 u, v, w とは x, y, z 方向の流速成分であり， t は時刻を表わす。 F は流体運動以外の原因によるフラックスを示し，例えばフィック則¹⁾によれば，

$$F_x = -D_x \frac{\partial c}{\partial x}, \quad F_y = -D_y \frac{\partial c}{\partial y}, \quad F_z = -D_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (1.1.3)$$

となる。 D_x, D_y, D_z は拡散係数である。また R は反応などによる変化の項である。式 (1.1.2), 式 (1.1.3) を式 (1.1.1) に代入すれば,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} + R \quad (1.1.4)$$

を得る。 u, v, w , 及び c を瞬時瞬時にして定義される量とすれば D_x, D_y, D_z は c が大きくない限り一定値とすることができる。式 (1.1.4) を Fick の拡散方程式と称す。乱流場などで速度、濃度が不規則に変化する場合には流速、濃度としてはある程度の時間にわたり平均化したものを対象とする。その時の拡散係数は主として流速変動の状況により変化しこれを乱流拡散係数と呼ぶ。本章においては後者を出発点とする。式 (1.1.4) の境界条件としては例えば z 軸に垂直な境界面にて

$$\left[-D_z \frac{\partial c}{\partial z} + \beta c \right] = f(t, x, y) \quad (1.1.5)$$

とする場合が多い^{3), 4)}。以上式 (1.1.4), (1.1.5) によって水質変化の状況は完全に記述される。

式 (1.1.4) は 3 次元偏微分方程式であり通常その取り扱いには容易ではない。一方、水路、河川などでは断面平均水質の流下方向の変化のみを検討の対象にすればよい事が多く、式 (1.1.4) を断面平均水質 \bar{c} に関する一次元式に変換する必要がある。

今、取り扱いを簡単にするために x を流下方向とする一様断面水路を考えると式 (1.1.4) は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} + R \quad (1.1.6)$$

となるがこれを断面平均化すると

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{1}{A} \int_s \{ f(t, x, y) - \beta c \} ds - \frac{\partial \bar{u}' c'}{\partial x} + \bar{R} \quad (1.1.7)$$

となる。ここに上付きバー，上付きプライムはそれぞれ断面平均値及び断面平均値からの偏差であり， A は断面積， s はその境界を示す。式(1.1.7)右辺第2項は外部からの負荷項であるからこれを \bar{q} とすれば，

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{\partial \overline{u'c'}}{\partial x} + \bar{q} + \bar{R} \quad (1.1.8)$$

となる。また， \bar{q} ， \bar{u} ，及び \bar{R} が時間的に一定の場合は定常状態を考えることができるが，この時には

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{\partial \overline{u'c'}}{\partial x} + \bar{q} + \bar{R} \quad (1.1.9)$$

となる。式(1.1.8)から式(1.1.9)への移行にあたっては，上記の3変数が定常的な変動を行うとしても同様な操作が可能であり， $\langle \bar{c} \rangle$ ， $\langle \bar{u} \rangle$ によって \bar{c} ， \bar{u} の時間的平均値を表せば，

$$\langle \bar{u} \rangle \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \langle \bar{c} \rangle}{\partial x^2} - \frac{\partial \langle \overline{u'c'} \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle \tilde{u} \tilde{c} \rangle}{\partial x} + \langle \bar{q} \rangle + \langle \bar{R} \rangle \quad (1.1.10)$$

を得る。ここに \tilde{c} は \bar{c} の時間的平均からの偏差である。 $-\overline{u'c'}$ ， $-\langle \tilde{u} \tilde{c} \rangle$ などは $\partial \bar{c} / \partial x$ ， $\partial \langle \bar{c} \rangle / \partial x$ が原因力となっている場合にはこれの係数倍によって表示できることが多く，その係数を特に分散係数と称している。また他の原因によって発生する場合もある。 R に関し一次反応仮定が成立し反応係数 k が一定であるとする

$$R = -k c \quad (1.1.11)$$

であり， $q = 0$ の時に限り $c = c_e e^{-kt}$ と変換することによって

$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \bar{c}_e}{\partial x^2} - \frac{\partial \overline{u'c'_e}}{\partial x} \quad (1.1.12)$$

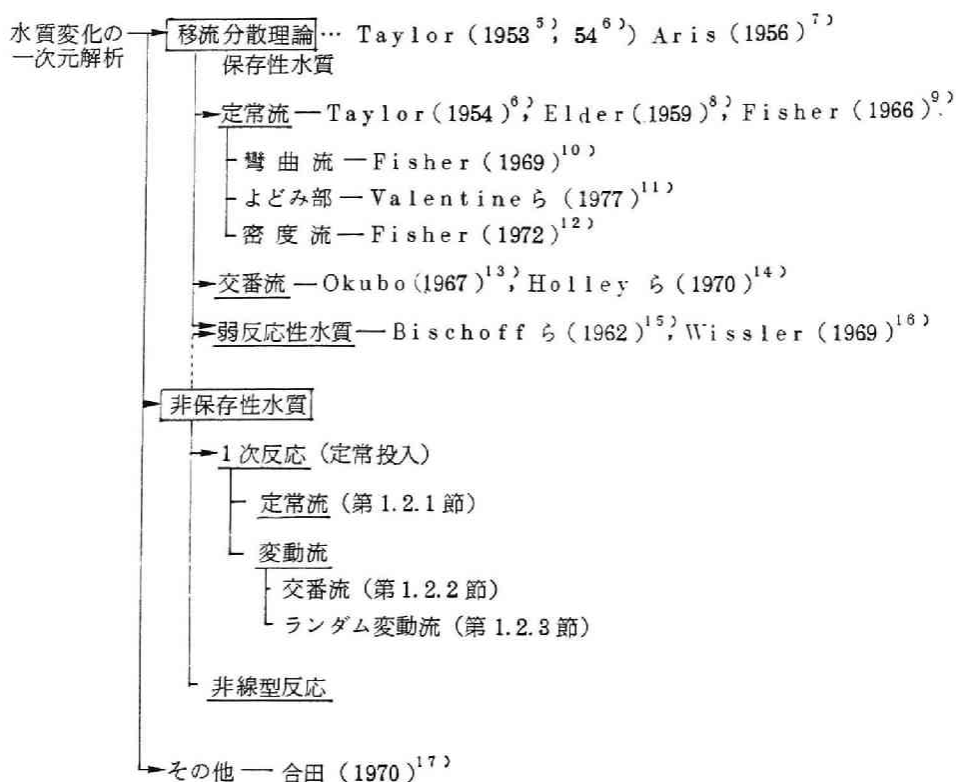
が成立するから c_e は保存性物質と同様の挙動を示すことがわかる。すなわち一次反応性物質，パルス投入の場合は保存性物質と同様の結果となる。

式(1.1.8)にて $\bar{q} = \bar{R} = 0$ での $\overline{u'c'}$ と $\partial \bar{c} / \partial x$ の関係はいわゆる移流分散理

論として Taylor⁵⁾ 以来数多くの研究者の興味の対象となってきた。

表 1.1.1 にその代表的なものを示すがここではこれを乱流拡散理論の一応用と解釈し検討を行ってみよう。

表 1.1.1 水質変化の一次元解析



乱流拡散理論¹⁸⁾ においては分散係数は次式で定義され

$$D_e = \frac{-\overline{uc'}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}} \quad (1.1.13)$$

u の自己相関関数 $R_2(\tau)$ から

$$D_e = \int_0^\infty R_2(\tau) d\tau \quad (1.1.14)$$

によって算出される。ここに $R_2(\tau)$ とは marked fluid が τ 時刻をへだてて体験する流速 u_1, u_2 の相関関数である。今 u が定常であり断面内の位置 $\xi = (y, z)$ のみで決定されると考えるならば $R_2(\tau)$ は

$$R_2(\tau) = \frac{1}{A} \int_A dA_{\xi_1} \int_A dA_{\xi_2} u'(\xi_1) u'(\xi_2) \phi_2(\xi_1, \xi_2; \tau) \quad (1.1.15)$$

によって算出できる。ここに $\phi_2(\xi_1, \xi_2; \tau)$ とは marked fluid が時間 τ の間に ξ_1 から ξ_2 を移動する確率である。断面内での移動は乱流拡散によるから $\phi_2(\xi_1, \xi_2; \tau)$ は

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y_2} D_y \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial z_2} D_z \frac{\partial \phi_2}{\partial z_2} + \delta(\xi_1 - \xi_2, \tau) \quad (1.1.16)$$

の解である。ここで境界を通して ϕ_2 の出入はないと仮定しておく。

式 (1.1.15) 中の A_{ξ_1} に関する平均化は式 (1.1.16) 上にて行うことができる。すなわち式 (1.1.16) に $u'(\xi_1)$ を乗じ断面内平均を行えば

$$V_2(\xi_2, \tau) = \frac{1}{A} \int u'(\xi_1) \phi_2(\xi_1, \xi_2; \tau) dA_{\xi_1} \quad (1.1.17)$$

として

$$\frac{\partial V_2(\xi_2, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y_2} D_y \frac{\partial V_2}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial z_2} D_z \frac{\partial V_2}{\partial z_2} + \frac{1}{A} u'(\xi_2) \delta(\tau) \quad (1.1.18)$$

となる。この $V_2(\xi_2, \tau)$ を使用すれば式 (1.1.14) からは D_e は

$$D_e = \int_A dA_{\xi_2} u'(\xi_2) \int_0^\infty V_2(\xi_2, \tau) d\tau \quad (1.1.19)$$

のように求め得る。さらに高次のモーメントについても同様な方法で求め得ることは明らかである。例えば p 次相関関数 $R_p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p)$ は

$$R_p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p) = \frac{1}{A} \int dA_{\xi_1} dA_{\xi_2} \dots dA_{\xi_p} \cdot u'(\xi_1) \cdot u'(\xi_2) \dots$$

$$u'(\xi_p) \cdot \phi_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p; \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p) \quad (1.1.20)$$

によって定義され、 ϕ_p は

$$\frac{\partial \phi_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)}{\partial \tau_p} = \nabla_{\xi_p} \cdot D \nabla_{\xi_p} \phi_p + \delta(\tau_p - \tau_{p-1}) \cdot \delta(\xi_p - \xi_{p-1}) \cdot$$

$$\phi_{p-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}; \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{p-1}) \quad (1.1.21)$$

によって算出できる。ここに $\phi_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p; \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p)$ とは水質が時刻 $0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p$ の時に $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ を通過する確率である。式 (1.1.21) にて $p=3$ とすれば

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \tau_3} = \nabla_{\xi_3} \cdot D \nabla_{\xi_3} \phi_3 + \delta(\tau_3 - \tau_2) \cdot \delta(\xi_3 - \xi_2) \cdot \phi_2(\xi_1, \xi_2; \tau_2)$$

$$(1.1.22)$$

を得るが、これに $u'(\xi_1) \cdot u'(\xi_2)$ を乗じ断面内で平均化すれば

$$\frac{\partial V_3(\xi_3, \tau_2, \tau_3)}{\partial \tau_3} = \nabla_{\xi_3} \cdot D \nabla_{\xi_3} V_3 + \delta(\tau_3 - \tau_2) u'(\xi_3) V_2(\xi_3, \tau_2)$$

$$(1.1.23)$$

となる。ここに $V_3(\xi_3, \tau_2, \tau_3)$ とは

$$V_3(\xi_3, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{A} \int dA_{\xi_1} \int dA_{\xi_2} u'(\xi_1) \cdot u'(\xi_2) \phi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \tau_2, \tau_3)$$

$$(1.1.24)$$

であり時刻 τ_3 に ξ_3 を通過する水質のラグランジュ相関関数に対応する。したがって $V_3(\xi_3, \tau_2, \tau_3)$ をさらに τ_2, τ_3 について積分し

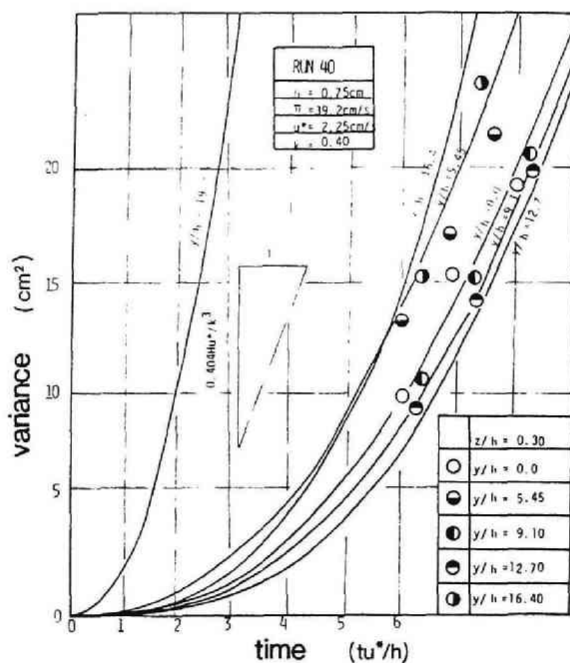
$$\bar{V}_3(\xi_3, \tau) = \frac{2}{A} \int_0^\tau d\tau_3 \int_0^{\tau_3} d\tau_2 V_3(\xi_3, \tau_2, \tau_3) \quad (1.1.25)$$

とすれば $\bar{V}_3(\xi_3, \tau)$ は式 (1.1.23) から

$$\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial \tau} = \nabla_{\xi_3} \cdot D \nabla_{\xi_3} \bar{V}_3 + \frac{2}{A} \int_0^\tau d\tau_3 u'(\xi_3) \cdot V_2(\xi_3, \tau) \quad (1.2.26)$$

を満足しなければならない。 $\bar{V}_3(\xi_3, \tau)$ とは式 (1.1.25) の定義から時刻 0 にて断面内に一様に放出された水質のうち ξ_3 を通過するものの時刻 τ 後の分散である。

以上に関連し開水路実験を行った。使用した水路は全長 7 m, 0.3 m 幅鋼製矩型水路である。トレーサーとしてはメチルアルコールによる比重調整済食塩水を使用し白金線型電導度測定プローブによって濃度測定を行っている。解析の際の座標系は後述する図 1.3.1 と同様に設定した。トレーサー投入 y 座標は水路幅方向中央を $y = 0$ として $y = -14 \sim +14$ (cm) の範囲にて 2 cm 毎と

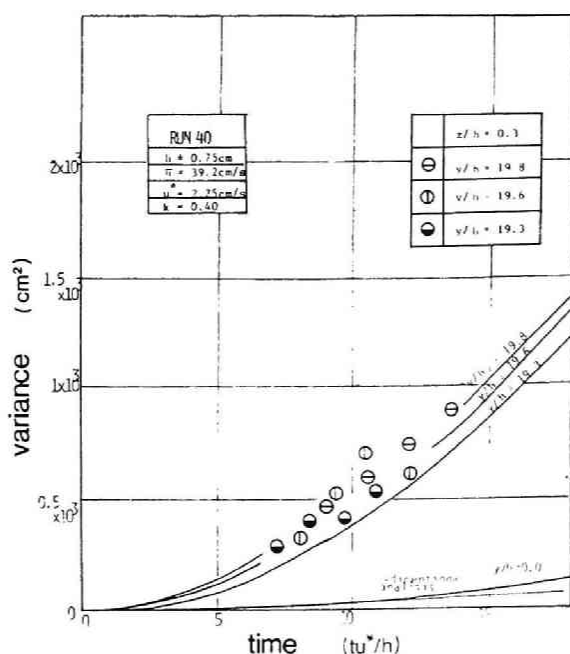


(a) 中央部付近

図 1.1.1 \bar{V}_3 の観測例

$t = x/\bar{u}$ によって x, t 間の変換をした。

水路中央を $y = 0$ とし z は水面より下方にとる。



(b) 壁面近傍

し、 $x = 0 \text{ cm}$ 、 $z = 0.25 \text{ cm}$ 点からパルス投入した。したがって 1 ランの実験は $(14 - (-14)) / 2 + 1 = 15$ 回の投入及びその観測からなり、解析ではこれらを加え合わせることによって水路断面内一様投入の代替とする。また拡散区間中央付近にて熱膜流速計による流速分布稠密測定を行っている。図 1.1.1 はこの実験にて観測された V_3 の変化であり、実線は式 (1.1.16) を数値解析により解き求めたものを示す。使用した流速分布は観測値を用いこれとプラントルの混合距離にもとづく乱流拡散係数 (但し中央部付近の横方向拡散係数は $0.16 hu_*^8$, h : 水深, u_* : 摩擦速度とした) を仮定している。図に示すように水路中央部付近での分散は壁付近にくらべかなり小さいことがわかる。また図 1.1.2 は式 (1.1.18), (1.1.15) を用いて計算したラグランジュ相関関数であり、尾を引くのが特徴的である。また図 1.1.3 は相関関数を D_e によって無次元化示したものである。横軸は Fisher の time scale ($0.30 b^2 / Ru_*$, b : 水路半幅, R : 径深) を単位としたものであり、この程度の time scale をもった水質交換運動が移流分散に大きな役割りを果していることが理解できる。

以上、移流分散論はラグランジュ拡散理論の簡単な応用例として解釈できる

ことを示した。

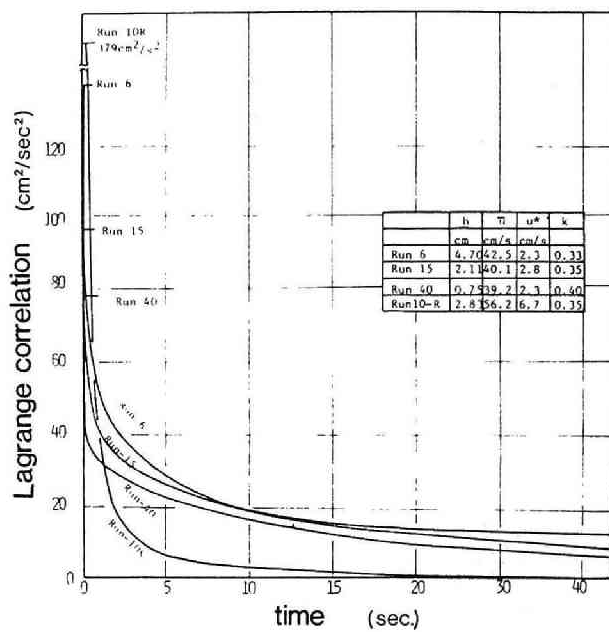


図 1.1.2 ラグランジュ 相関関数

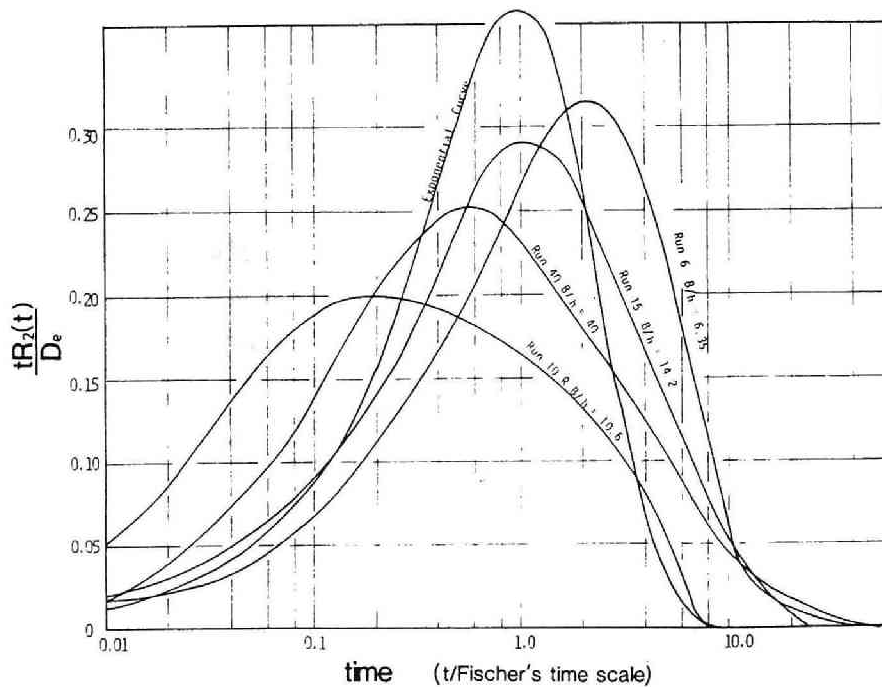


図 1.1.3 ラグランジュ 相関関数と分散係数

1.2 非保存性水質の一次元解析

1.2.1 定常流

第1.1節では $R=0$ ，かつパルス投入の場合を述べたが，この仮定が許されない時には式(1.1.14)，(1.1.19)あるいは従来の移流分散理論によって求められる分散係数の適用は再検討が必要となる。例えばこれを $R=-kc$ ，定常投入の場合に検討してみよう。基礎式として次式を採用する。

$$u(y, z) \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} - kc + \delta(x) \quad (1.2.1)$$

Aris⁷⁾のモーメント法によって式(1.2.1)を取り扱うことにし次の $c_p(y, z)$ 及び M_p を定義しておく。

$$c_p(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^p c(\xi, y, z) d\xi \quad (1.2.2)$$

$$M_p = \frac{1}{A} \int_A c_p(y, z) dA \quad (1.2.3)$$

式(1.2.1)両辺に x^p を乗じ $(-\infty, \infty)$ にて積分する。この際 D_x, D_y, D_z は一定値としておくと

$$-p u c_{p-1} = D_x p(p-1) c_{p-2} + D_y \frac{\partial^2 c_p}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c_p}{\partial z^2} - k c_p + \delta_p \quad (1.2.4)$$

および

$$-p \overline{u} c_{p-1} = D_x p(p-1) M_{p-2} - k M_p + \delta_p \quad (1.2.5)$$

を得る。ここに δ_p とは $p=0$ のとき1， $p \neq 0$ のとき0の関数である。式(1.2.5)の導出にあたっては境界面からの拡散フラックスを0とした。いっぽう式(1.2.1)を一次元化したものを

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D_e \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - k_e \bar{c} + \delta(x) \quad (1.2.6)$$

と仮定すればこれから導出される M_p の変化式は

$$-p \bar{u} M_{p-1} = D_e p(p-1) M_{p-2} - k_e M_p + \delta_p \quad (1.2.7)$$

となるから式 (1.2.5), (1.2.7) を比較して $k_e = k$, 及び

$$D_e = \frac{\bar{u} \bar{c}_{p-1} - \bar{u} M_{p-1}}{(p-1) M_{p-2}} + D_x \quad (1.2.8)$$

を満足する事が望ましい。すべての p についてこれを成立させることは不可能であるから例えば $p=2$ の場合を考えて

$$D_e = \frac{\bar{u} \bar{c}_1 - \bar{u} M_1}{M_0} + D_x \quad (1.2.9)$$

とする。 M_1 は式 (1.2.5) から $\bar{u} \bar{c}_0 / k$ であるが式 (1.2.1) のような断面内一様投入では $c_0 = \bar{c}_0 = M_0$ となるから D_e は結局

$$D_e = \frac{\bar{u} \bar{c}_1}{M_0} - \frac{\bar{u}^2}{k} + D_x \quad (1.2.10)$$

である。したがって式 (1.2.6) の等価分散係数 D_e は式 (1.2.4) に $p=1$ を代入した時成立する

$$D_y \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} - k c_1 = -u c_0 \quad (1.2.11)$$

を境界面に於て流出入フラックスがないと仮定し解きそれを式 (1.2.10) に代入すればよい。例えば流動を2次元クエット流

$$u(z) = \bar{u} \left(1 + \frac{2z}{h}\right), \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.2.12)$$

とすれば、式 (1.2.11) から

$$c_1(z) = \frac{\bar{u} c_0}{k} \left\{ \left(1 + \frac{2z}{h}\right) - \frac{2/h}{\sqrt{k/D_z}} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{k}{D_z}} z}{\text{ch} \sqrt{\frac{k}{D_z}} \frac{h}{2}} \right\} \quad (1.2.13)$$

を得，これを式 (1.2.10) に代入して

$$D_e = \frac{\bar{u}^2}{k} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{4}{D_a} + \frac{8}{(D_a)^{3/2}} \text{th} \frac{(D_a)^{1/2}}{2} \right\} + D_x \quad (1.2.14)$$

となる。ここに D_a とは

$$D_a = \frac{k h^2}{D_z} \quad (1.2.15)$$

で定義される Damköhler II 数である。パルス投入，反応なしの場合の移流拡散係数は $\bar{u}^2 h^2 / 30 D_z + D_x^{(19)}$ であるから反応の有無によってまったく異った関係となる。図 1.2.1 は反応がある場合，ない場合の移流分散係数の比を $D_x = 0$ としてプロットしたものであるが D_a が大きくなるにつれて両者の差異が開いていく様子が示されている。また図 1.2.2 は $D_x = 0$ として式 (1.2.14) による D_e と反応がないとした場合の $D_e (= D_e|_{k=0})$ による水質分布の比較を行ったものである。 D_a (断面内拡散時間スケール/反応時間スケール) が大きくなるにつれて投入点付近の濃度比が高くなることが示されている。

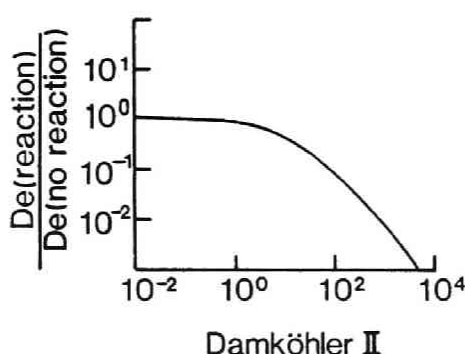


図 1.2.1 分散係数と Damköhler II 数
2 次元定常クエット流の場合

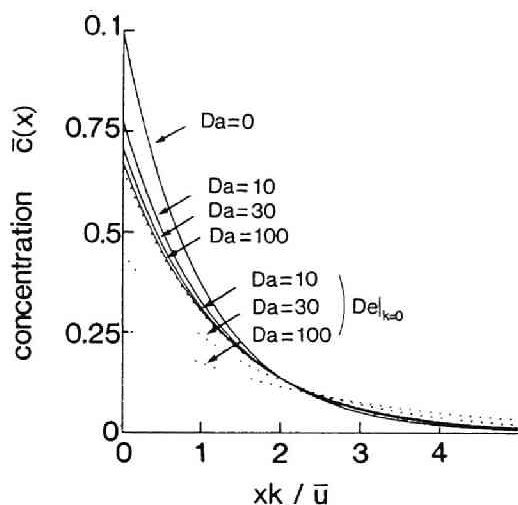


図 1.2.2 水質分布と Damköhler II 数

2次元定常クエット流の場合。実線は式(2.3.14)を用いたもの、点線は Saffman の解 $\bar{u}^2 h^2 / 30 D_z$ を用いた場合である。 $\bar{D}_a = 0$ の時両者は一致する。

1.2.2 交番流

前節は流れが定常の場合であったがこれが非定常、例えば振動を行う場合を考えて見よう。式(1.2.4), 及び式(1.2.5) に対応する非定常式は次のようになる。

$$\frac{\partial c_p}{\partial t} - \rho u c_{p-1} = D_x \rho (\rho - 1) c_{p-2} + D_y \frac{\partial^2 c_p}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c_p}{\partial z^2} - k c_p + \delta_p \quad (1.2.16)$$

$$\frac{d M_p}{d t} - \rho \bar{u} c_{p-1} = D_x \rho (\rho - 1) M_{p-2} - k M_p + \delta_p \quad (1.2.17)$$

1 周期にわたり平均化した濃度について式(1.2.7) に対応するものを考えると

$$-\rho \langle \bar{u} \rangle \langle M_{p-1} \rangle = D_x \rho (\rho - 1) \langle M_{p-2} \rangle - k_s \langle M_p \rangle + \delta_p \quad (1.2.18)$$

を得る。ここに $\langle \quad \rangle$ とは時間平均を意味する。式(1.2.18)と、式(1.2.17)を時間平均したものから式(1.2.8)と同様にして $\bar{\epsilon}_s = \bar{\epsilon}$ 、及び

$$D_e = \frac{\langle \overline{u c_{p-1}} \rangle - \langle \overline{u} \rangle \langle M_{p-1} \rangle}{(p-1) \langle M_{p-2} \rangle} + D_x \quad (1.2.19)$$

を得るが、現象を $\langle u \rangle = 0$ に限定し、 $p=2$ の時を検討することにすれば、

$$D_e = \frac{\langle \overline{u c_1} \rangle}{\langle M_0 \rangle} + D_x \quad (1.2.20)$$

となる。式(1.2.17)から $\langle M_0 \rangle = 1/\bar{\epsilon}$ であり c_1 は

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - u c_0 = D_y \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} - \bar{\epsilon} c_1 \quad (1.2.21)$$

の解であるからこれを式(1.2.20)に代入すれば交番流・定常投入下での分散係数を求めることができる。

例えば流れを前節で取り扱った2次元ジェット流が正弦振動を行っている場合と仮定する。流速 $u(z, t)$ は

$$u(z, t) = u_0 \left(1 + \frac{2z}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.2.22)$$

であるから、これを式(1.2.21)に代入し解き、さらに式(1.2.20)から D_e を求めてみると

$$D_e = \frac{4 u_0^2 h^2}{\pi^4 D_z} \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\alpha_n}{1 + \left\{\frac{\pi}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c}\right\} \alpha_n^2} + D_x \quad (1.2.23)$$

となる。ここに

$$T_c = \frac{h^2}{D_z}, \quad \alpha_n = 1 + \frac{k T_c}{(2n-1)^2 \pi^2} = 1 + \frac{D_a}{(2n-1)^2 \pi^2} \quad (1.2.24)$$

である。これを $D_x=0$ として Holley ら¹⁴⁾ の導出した $k=0$ の時の解 $D_e|_{k=0}$ と比較してみると、

$$\frac{D_e}{D_e|_{k=0}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\alpha_n}{1 + \left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c} \right\}^2 \alpha_n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\pi}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c} \right\}^2}} \quad (1.2.25)$$

となる。図 1.2.3 はこの比を示したものであるが D_a が小さい時には保存性水質と同様の挙動を示し、 D_a が大きくなるにつれてその差が大きく表れてくる様子が理解されよう。 T/T_c が大きい時の挙動が式 (1.2.14) と一致してくる事は言うまでもない。

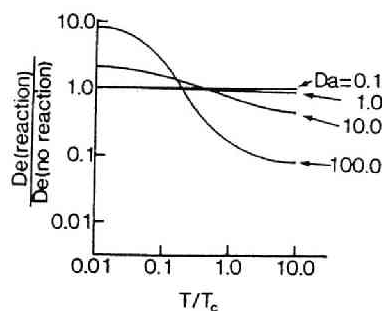


図 1.2.3 分散係数と T/T_c
2次元交番クエット流の場合

1.2.3 ランダム変動流

前節では代表流速として断面内平均流速を用いているが、実際場では瞬間瞬間のこれを与えることは困難でありせいぜいその平均値あるいは2,3の低次モーメントによって水質分布の状況を推定する必要がある。その場合 $T/T_c \gg 1$

の時（流況変化スケールにくらべ断面内混合時間スケールが小さい時）には刻々の分散係数は定常流下でのそれによって近似できるから解析は容易となる。

いま一様な一次元水路にて定常的な点投入を行う場合を想定しよう。現象は次式によって記述される。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_e \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + \delta(x) \quad (1.2.26)$$

式（1.2.26）中の各変数はいずれも断面平均値であるが，記号の簡略化のため上付きバーは付けない。上式のモーメント型は，

$$\frac{dM_p}{dt} + kM_p = u p M_{p-1} + D_e p(p-1) M_{p-2} + \delta_p \quad (1.2.27)$$

である。これを解くには u の具体的な性質が問題であるがここではその簡単な例として平均値，自己相関関数を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} E[u] &= \langle u \rangle \\ E[(u(t) - \langle u \rangle) \cdot (u(\tau) - \langle u \rangle)] &= u_0^2 \exp\left[-\frac{|t-\tau|}{T}\right] \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

式（1.2.28）から各次のモーメントの時間的平均値 $\langle M_p \rangle$ は k, D_e を一定として

$$\langle M_0 \rangle = \frac{1}{k} \quad (1.2.29)$$

$$\langle M_1 \rangle = \frac{\langle u \rangle}{k^2} \quad (1.2.30)$$

$$\langle M_2 \rangle = \frac{2}{k^2} \left[\frac{u_0^2}{\frac{1}{T} + k} + \frac{\langle u \rangle^2}{k} + D_e \right] \quad (1.2.31)$$

のように求められる。一方、式 (1.2.26) に対応する平均化式として定常拡散式を対応させ、

$$\tilde{u} \frac{d\langle c \rangle}{dx} = \tilde{D}_e \frac{d^2\langle c \rangle}{dx^2} - \tilde{k} \langle c \rangle + \delta(x) \quad (1.2.32)$$

を考えよう。ここに \tilde{u} , \tilde{D}_e 及び \tilde{k} は定数であり等価流速, 等価移流分散係数, 及び等価反応係数とでも名付けられるものである。式 (1.2.32) から各次のモーメントは

$$\tilde{k} \langle M_p \rangle = \tilde{u} p \langle M_{p-1} \rangle + \tilde{D}_e p(p-1) \langle M_{p-2} \rangle + \delta_p \quad (1.2.33)$$

によって求められるから $p = 0 \sim 2$ のとき式 (1.2.33) が式 (1.2.29) ~ (1.2.31) を満足するように \tilde{u} , \tilde{D}_e , \tilde{k} を定めると

$$\tilde{k} = k \quad (1.2.34)$$

$$\tilde{u} = \langle u \rangle \quad (1.2.35)$$

$$\tilde{D}_e = D_e + \frac{u_0^2}{\frac{1}{T} + k} \quad (1.2.36)$$

となることがわかる。すなわち変動流下での水質分布特性を定常流仮定によって取り扱うときには流速には平均値を使用できるが、分散係数としては式 (1.2.36) に応じて増加させる必要がある。上記の 3 関係式は 0 ~ 2 次モーメントが合致する必要条件であるが、この条件下ではより高次のモーメントは一致しない。例えば $\langle u \rangle = 0$, かつ $Tk \gg 1$ の時に式 (1.2.27) からは

$$\langle M_3 \rangle = 0 \quad (1.2.37)$$

$$\langle M_4 \rangle = \frac{72 u_0^4}{k^5} + \frac{12 D_e \langle M_2 \rangle}{k} \quad (1.2.38)$$

を得る (但し 3 次相関を 0 とし 4 次相関にはミリオンシチコフ仮定²⁰⁾を用いた)。しかるに等価定常モデル式 (1.2.33) からは

$$\langle M_3 \rangle = 0 \quad (1.2.39)$$

$$\langle M_4 \rangle = \frac{12 \tilde{D}_e \langle M_2 \rangle}{k} \quad (1.2.40)$$

となるから式(1.2.36)の \tilde{D}_e を用いるかぎり4次モーメントは一致せず、 $u_0^2 k \gg D_e$ ならば等価定常モデルの4次モーメントは瞬時解を重ね合わせた時の1/3程度となる。

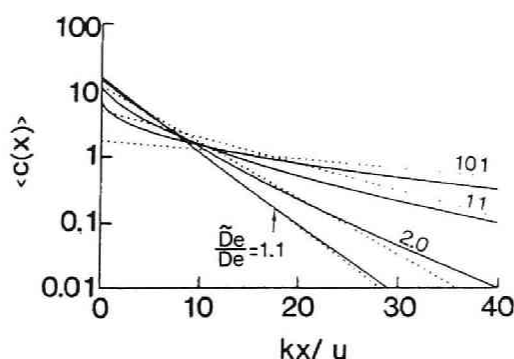


図 1.2.4 水質分布と \tilde{D}_e/D_e
 $kD_e/\langle u \rangle^2$ を 10 とし $u_0/\langle u \rangle$ を 1, 3.16, 10, 31.6
 と変化させた場合。実線は式(1.3.26)を用いて算出した厳密解、
 点線は式(1.2.32), (1.2.36)を用いて算出した簡略解である。
 $kT \gg 1$ とした。

図 1.2.4 は流動状況変化スケールが現象に関与する他の時間スケールに比べはるかに大きいとした時の水質分布形状を定常解 c_s から求め、式(1.2.32)の解 $c_{s,e}$ と比較したものである。

$$c_s(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{um} \exp \left\{ \frac{u}{2D_e} (1-m)x \right\}, & u > 0 \\ -\frac{1}{um} \exp \left\{ \frac{u}{2D_e} (1+m)x \right\}, & u < 0 \end{cases} \quad (1.2.41)$$

$$c_{se}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{u}\tilde{m}} \exp \left\{ \frac{\tilde{u}}{2\tilde{D}_e} (1-\tilde{m}) x \right\}, & \tilde{u} > 0 \\ -\frac{1}{\tilde{u}\tilde{m}} \exp \left\{ -\frac{\tilde{u}}{2\tilde{D}_e} (1+\tilde{m}) x \right\}, & \tilde{u} < 0 \end{cases} \quad (1.2.42)$$

$$\langle c(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} c_s(x, u) \text{prob}(u) du$$

但し

$$m = \sqrt{1 + \frac{4D_e k}{u}} \quad (1.2.43)$$

$$\tilde{m} = \sqrt{1 + \frac{4\tilde{D}_e \tilde{k}}{\tilde{u}}}$$

\tilde{D}_e は仮定から $D_e + u_0^2/k$ とし, u の生起確率分布は正規分布と仮定している。比較的広い範囲の $u_0^2/\langle u \rangle^2$ にわたって両曲線の一致が見られる。原点(投入点)付近にて $\langle c(x) \rangle$ が立上っていくのが見られるが, 先に考察した4次モーメントの挙動と一致する。

ここに示したような変動場の定常仮定による取り扱いは実際水域においてしばしば用いられる。その場合, 分散係数は保存性物質をトレーサに用いて決定するのが通常であるがこれを非保存性物質解析に拡張することは上記の議論からも明らかなように十分な注意を必要とする。その例として図1.2.5に示すようなSRP(溶存性反応リン)の濃度分布²¹⁾を検討してみる。これは図1.2.6に示すような湖岸に沿って下水放流口を中心に1979年4月~10月にわたり1週間毎の頻度で観測したデータ(岸から5m, 60~100mの2点採水)の平均プロフィールであるが, 各回での分布パターンは放流点に対し対象とはならず岸に沿い風下側に傾いた極めていびつな形状となっている(図1.2.7)。沖合方向への濃度の広がりに関しては60~200mを境にして湖水バックグラウンド値になることが別途確められており, これらのことから図1.2.5の分布を

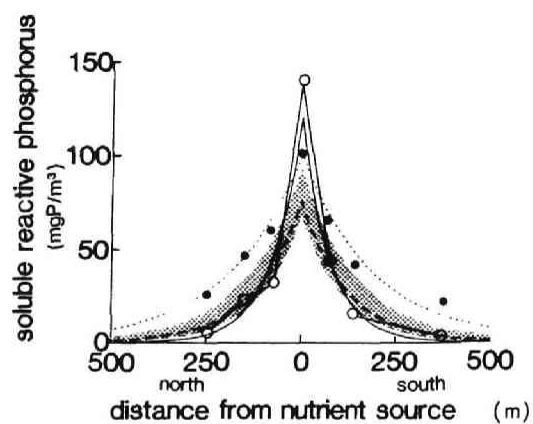


図 1.2.5 SRP の濃度分布

SRP 分布の時間平均を示す（白丸）。黒丸は塩素イオン濃度（単位は任意，バックグラウンド値を差し引く）でありこの分布から拡散係数を推定するのが通常である。

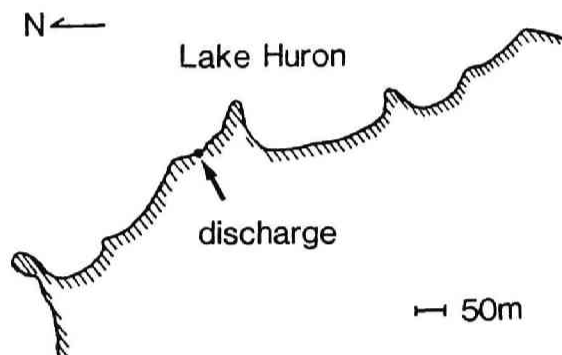


図 1.2.6 観測地点図

Huron 湖 Harbor Beach, Michigan, USA

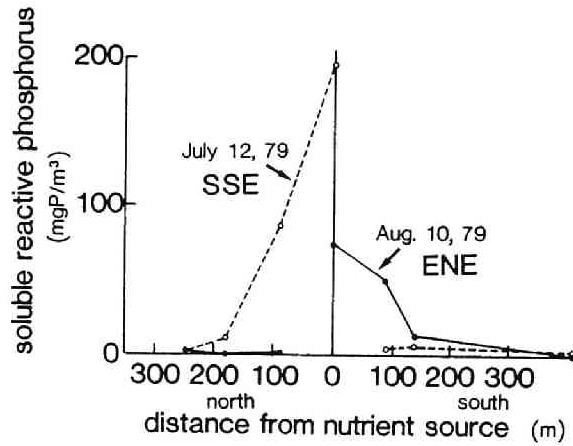


図 1.2.7 SRP の濃度分布例

南東風によって北西側に、北西風によって東南側に移流されていることがわかる。

汀線に沿う次の一次元拡散方程式によって表わしてみよう。

$$\tilde{D}_e \frac{d^2 \langle c \rangle}{dx^2} - k \langle c \rangle = E (\langle c \rangle - c_0) \quad (1.2.44)$$

ここに E は沖合との水質交換速度であり、沖合方向拡散係数 D_e との間に B を沿岸幅として

$$E = \frac{D_e}{B^2} \quad (1.2.45)$$

の関係がある。ここに c_0 は沖合の SRP 濃度である。 $B \cong 60 \text{ m}$ 及び別途求められた $D_e \cong 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ から $E = 2.4 \text{ (1/d)}$ となるが、今、 \tilde{D}_e が保存性物質、非保存性物質をとわず一定であるとすれば、SRP と同時に測定された塩素イオン分布 (図 1.2.5 の黒丸) から \tilde{D}_e の推定ができる。すなわち SRP にならい塩素イオン濃度の時間的平均値 $\langle c_c \rangle$ は

$$\tilde{D}_e \frac{d^2 \langle c_c \rangle}{dx^2} = E (\langle c_c \rangle - c_{0c}) \quad (1.2.46)$$

に従うからその解は a を負荷に関する定数として

$$\langle c_o \rangle = \frac{a}{\sqrt{\tilde{D}_e E}} \cdot \exp \left(-\sqrt{\frac{E}{\tilde{D}_e}} |x| \right) + c_{oc} \quad (1.2.47)$$

となりこれが観測分布に一致するような \tilde{D}_e を求めればよい。図 1.2.5 点線は $\tilde{D}_e = 10^5 \text{ m}^2/\text{d}$ とした時の解である。一方, SRP の減衰は放流点付近に密生する *Cladophora glomerata* (シオグサ) の摂取が主因であるがその速度 R は

$$R = -U_{\max} \frac{c}{c + k_s} \cdot \frac{X}{h} \quad (1.2.48)$$

によって記述される。ここに U_{\max} は最大摂取速度 (gP/g 藻類乾重/ d), k_s は摂取半飽和定数, X は *Cladophora* 密度 ($\text{g DW}/\text{m}^2$), h は水深であり, 摂取室内実験及び現地観測からそれぞれ $1 \times 10^{-2} \text{ gP}/\text{g DW}/\text{d}$, $0.125 \text{ g}/\text{m}^3$, $100 \sim 300 \text{ g DW}/\text{m}^2$, 及び $0 \sim 1.0 \text{ m}$ であることが知られているから, $X \cong 200 \text{ g DW}/\text{m}^2$, $h \cong 0.5 \text{ m}$ として

$$R \cong -0.40 \frac{c}{k_s + c} \quad (\text{gP}/\text{m}^2/\text{d}) \quad (1.2.49)$$

となり, 一次反応係数 k は $c = 0 \sim 0.1 \text{ gP}/\text{m}^3$ にて

$$k \cong -\frac{\partial R}{\partial c} \cong 1.0 \sim 3.2 \quad (1/\text{d}) \quad (1.2.50)$$

の値をとる。図 1.2.5 のトーン部分は上記の E 及び k を用い, $\tilde{D}_e = 10^5 \text{ m}^2/\text{d}$ とした場合の解であるが, SRP の観測分布と比較してピーク値が低く裾が長い形状となる。

一方, この現象を岸付近にて卓越する汀線方向への移流によって検討してみよう。いまその速度を u とすれば, 一定方向への沿岸流が卓越している時には, 図 1.2.6 から対象場で縦方向ペクレ数は 1 に比べはるかに大きいと仮定し, 次式によってモデル化できると考える。

$$u \frac{dc}{dx} = -kc + E(c_0 - c) \quad (1.2.51)$$

この解は、 a を負荷に関する定数、 $u > 0$ として

$$c(x) = \begin{cases} \frac{a}{u} \exp \left\{ -\frac{E+k}{u} x \right\} + \frac{E}{k+E} c_0, & x > 0 \\ \frac{E}{k+E} c_0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.2.52)$$

となる。 u の生起確率 $\text{prob}(u)$ にもっとも簡単な場合である大きさ u_0 の flip-flop 状のものを考えてみると、

$$\text{prob}(u) = \frac{1}{2} \{ \delta(u + u_0) + \delta(u - u_0) \} \quad (1.2.53)$$

であるから

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= E(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \text{prob}(u) du \\ &= \frac{a}{2u_0} \exp \left\{ -\frac{E+k}{u_0} |x| \right\} + \frac{Ec_0}{k+E} \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

いっぽう式 (1.2.44) の解は

$$\langle c \rangle = \frac{a}{2\sqrt{\tilde{D}_e(k+E)}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{E+k}{\tilde{D}_e}} |x| \right\} + \frac{Ec_0}{k+E} \quad (1.2.55)$$

となるから両解が一致するための必要十分条件は

$$\tilde{D}_e = \frac{u_0^2}{k+E} \quad (1.2.56)$$

となる。すなわち反応係数に応じて汀線方向分散係数に変化することになり、

塩素イオン分布から推定された $\tilde{D}_e = 10^5 \text{ m}^2/\text{d}$ は $k = 0$ の時のみに対応すると考えなければならない。この時 u_0 は 490 m/d となり、 $k \cong 1.0 \sim 3.2 (1/\text{d})$ の水質の汀線方向分散係数は $4 \sim 7 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{d}$ と推定される。図 1.2.5 の実線は $k = 4 (1/\text{d})$ 、すなわち $\tilde{D}_e = (490)^2 / (2.4 + 4) = 3.75 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{d}$ とした時の SRP 分布であるが観測値と比較的よく一致する。また破線は $k = 4 (1/\text{d})$ であるが \tilde{D}_e としては塩素イオン分布から求めた $10^5 \text{ m}^2/\text{d}$ を使用した時の分布であり、上に述べてきた分散係数の反応に対する依存性が、計算分布に大きな影響をもっていることがわかる。

1.3 濃度変動の微視的解析

本節では乱流混合に伴う水質濃度の変動について若干の検討を行う。始めに述べたように、前節までで取り扱った濃度は乱流による変動を打ち消すためにある程度の時間にわたり平均化したものであり、実際に暴露される濃度は平均濃度にくらべかなり高濃度となる場合も多い。

まず解析すべき基礎式として式 (1.1.4) を取りあげる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_l \frac{\partial c}{\partial x_l} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x_l^2} + R \quad (1.3.1)$$

ここにサフィクス l は 1 ~ 3 の値をとり x_1, x_2, x_3 はそれぞれ式 (1.1.4) の x, y, z に対応するものとする。式 (1.3.1) では縮約記法を採用しており、 D は分子拡散係数である。いま流速の乱れによって濃度も変動すると考え変数をその時間平均値とそれからの偏差に分解する。

$$\begin{aligned} u_i &= \langle u_i \rangle + \tilde{u}_i \\ c &= \langle c \rangle + \tilde{c} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

式 (1.3.1) にこれらを代入し濃度変動の分散 ($\langle \tilde{c}^2 \rangle$) に関する収支式²²⁾ を導けば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \tilde{c}^2 \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \tilde{c}^2 \rangle}{\partial x_i} = & -2 \langle \tilde{u}_i \tilde{c} \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \langle \tilde{c}^2 \rangle}{\partial x_i} - \langle \tilde{u}_i \tilde{c}^2 \rangle \right) \\
& - 2D \left\langle \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle + 2 \langle \tilde{R} \tilde{c} \rangle
\end{aligned}
\tag{1.3.3}$$

$\langle \tilde{u}_i \tilde{c} \rangle$, $\langle \tilde{u}_i \tilde{c}^2 \rangle$ は乱流運動による $\langle \tilde{c} \rangle$ あるいは $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ のフラックスである。

水質混合場の典型的な例である矩形開水路でのプリューム拡散現象を取りあげ式(1.3.3)各項の評価を行ってみる。問題を簡単にするために水路の形状比(水深/水路幅)は1にくらべはるかに小さく、放出源は水路中央部鉛直方向線源とする(図1.3.1)。乱流拡散が分子拡散にくらべはるかに大きく水路幅方向(y)の拡散が卓越している時には、式(1.3.3)は

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \langle \tilde{c}^2 \rangle = & -2 \langle \tilde{v} \tilde{c} \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{c}^2 \tilde{v} \rangle - 2D \left\langle \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle
\end{aligned}
\tag{1.3.4}$$

(I)
(II)
(III)
(IV)

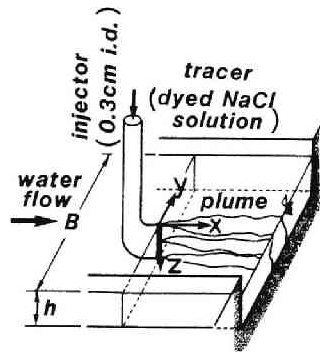


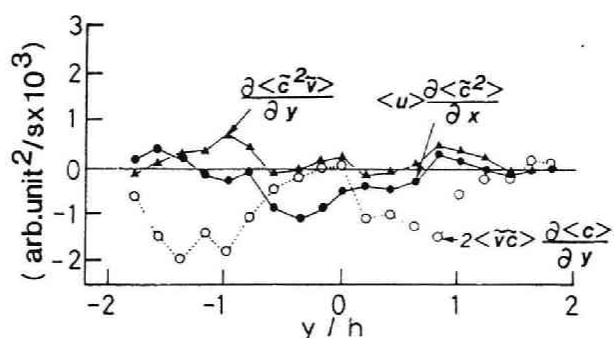
図 1.3.1 開水路線源プリューム実験概念図

となる。この式は平均濃度勾配 $\partial \langle c \rangle / \partial y$ により生成された $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ が (第Ⅱ項), 乱流拡散により y 方向に拡散しながら (第Ⅲ項), 分子拡散によって消散 (第Ⅳ項) していくことを示す。ここに第Ⅰ項の D/Dt は

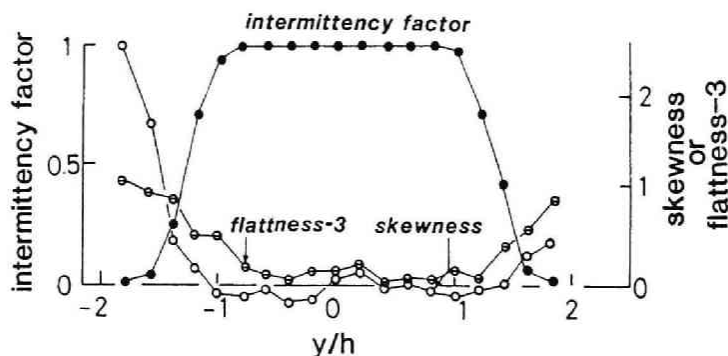
$$\frac{D}{Dt} = \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.3.5)$$

を示す。

式 (1.3.4) に関連し水路実験を行っている。実験は全長 7 m, 幅 0.3 m 鋼製水路で行われ, 図 1.3.1 のような座標設定及びトレーサ投入を行っている。流



(a) 式 (1.3.4) の各項



(b) \tilde{c} の統計的パラメータ

図 1.3.2 開水路線源プリューム実験

$\langle u \rangle = 26.5 \text{ cm/s}$, $u^* = 1.34 \text{ cm/s}$, $h = 5.0 \text{ cm}$,
 $B = 30.0 \text{ cm}$, $x = 220.1 \text{ cm}$, $z = 2.5 \text{ cm}$

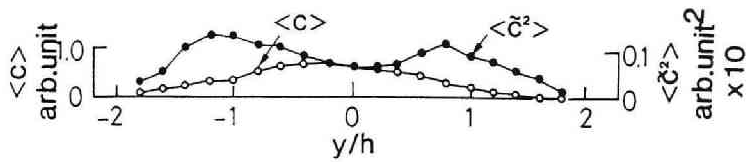


図 1.3.2 (c) $\langle c \rangle$, $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ の分布

速測定は 2 成分熱膜流速計 (DISA55R72), 濃度測定は白金線型電導度測定プローブ (0.25 cm ガラス管に 2 本の白金線を約 0.15 cm 間隔に挿入したもの) によっている。流速・濃度の相関特性測定にあたっては両プローブを 0.1 cm 以内に近接し使用した。計測, 数値処理方法は文献 (23) と同じである。まず図 1.3.2 (a) は実験水路にて (I), (II), (III) の各項を実測した例である。これからプリューム内での濃度変動構造を推定すると次のようになる。すなわちプリューム両脇の $\partial \langle c \rangle / \partial y$ が大きい領域で生成された $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ は乱流拡散によってプリューム中央部, 外端部へ拡散され消散される。その際, プリューム外端部位置は大規模な渦によって変動しこの付近の濃度変動は間欠性が強いものとなる。図 1.3.2 (b) に示す間欠率 (intermittency factor) とは観測時間中にセンサーがプリューム内に存在した時間の割合であり, 1 から 0 に連続的に変化している。またこの領域では \tilde{c} の累積度数分布も間欠性の影響を受けて歪んだもの (図 1.3.3) になり, 歪度・尖度共に特異な挙動を示している。式 (1.3.4) に関し $\langle \tilde{v} \tilde{c} \rangle$, $\langle \tilde{c}^2 \tilde{v} \rangle$ に乱流拡散表示を適用すると

$$\langle \tilde{v} \tilde{c} \rangle = - D_{\epsilon} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \quad (1.3.6)$$

$$\langle \tilde{c}^2 \tilde{v} \rangle = - D'_{\epsilon} \frac{\partial \langle \tilde{c}^2 \rangle}{\partial y} \quad (1.3.7)$$

となる。図 1.3.4 は式 (1.3.6) の D_{ϵ} を $\langle \tilde{v} \tilde{c} \rangle$, $\partial \langle c \rangle / \partial y$ 測定値から求めた例であり, その変動は激しくなくほぼ一定とみなしてよい。なお, 図 1.3.4 のケースにて平均濃度収支式に基づくモーメント法から求めた D_{ϵ} は 1.223

cm^2/s であり、 $-\langle \tilde{v} \tilde{c} \rangle / (\partial \langle c \rangle / \partial y)$ よりも若干大きな値となっている。

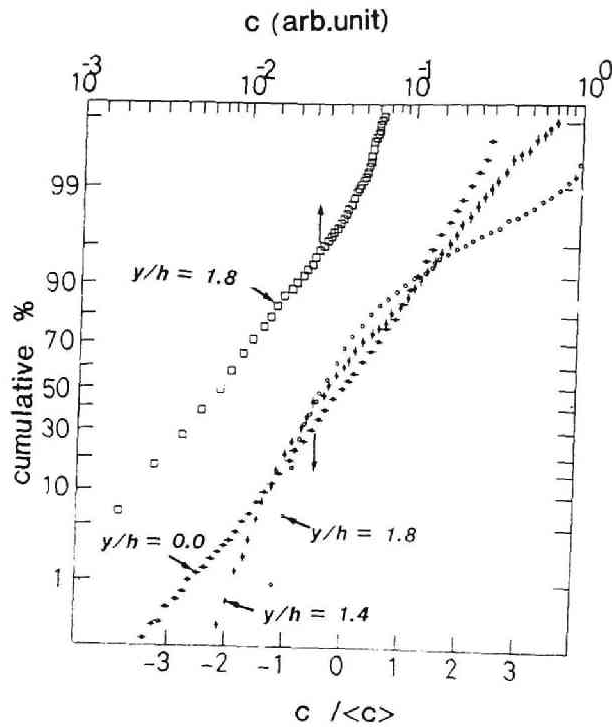


図 1.3.3 \tilde{c} の累積度数分布
測定位置は図 1.3.2 と同じである。

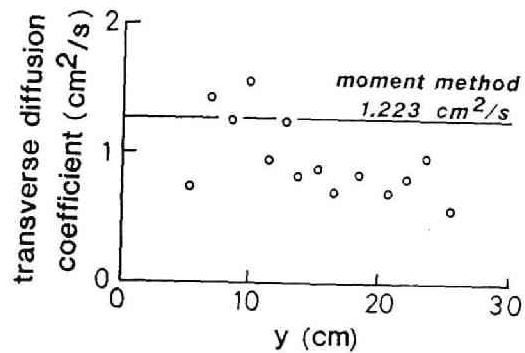


図 1.3.4 式 (1.3.6) による D_e の測定
 $\langle u \rangle = 24.5 \text{ cm/s}$, $u^* = 1.21 \text{ cm/s}$, $h = 5.1 \text{ cm}$,
 $B = 30.0 \text{ cm}$, $x = 220 \text{ cm}$, $z = 2.5 \text{ cm}$,
モーメント法による D_e の測定値は $1.223 \text{ cm}^2/\text{s}$ であった。

式 (1.3.6), (1.3.7) を式 (1.3.4) に代入すると

$$\frac{D}{Dt} \langle \tilde{c}^2 \rangle = 2 D_\epsilon \left(\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} D'_\epsilon \frac{\partial \langle c^2 \rangle}{\partial y} - 2 \epsilon_c \quad (1.3.8)$$

となる。ここに ϵ_c とは

$$\epsilon_c = D \left\langle \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle \quad (1.3.9)$$

である。Csanady²²⁾ は $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ が t に関し自己相似的に発達すると考え次式を導いた。

$$\frac{d^2 q}{d \zeta^2} + \zeta \frac{d q}{d \zeta} + (2 - \alpha) q = -2 \left(\frac{d f}{d \zeta} \right)^2 \quad (1.3.10)$$

ここに

$$\langle c \rangle = c_0(t) f(\zeta)$$

$$\langle \tilde{c}^2 \rangle = c_0^2(t) q(\zeta)$$

(1.3.11)

$$\zeta = \frac{y}{\sigma} = \frac{y}{\sqrt{2 D_\epsilon t}}$$

$$\alpha = \frac{\sigma^2 \epsilon_c}{D_\epsilon \langle \tilde{c}^2 \rangle}$$

であり $D'_\epsilon = D_\epsilon$ を仮定している。Csanady は $\alpha = 2$ とした時の解析解を示しているが、 α によって自己相似解 $q(\zeta)$ の形状は大きく変化する。例えば図 1.3.5 は $\alpha = 1 \sim 100$ とし差分法によって式 (1.3.10) を解いたものであるが α が大きくなるにつれて双峰分布が発生することが示されている。これに対応し図 1.3.6 は実験により得られた $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ の横方向分布であり自己相似形を示さず、流下に従って分布形が変化していることがわかる。Okoye²⁴⁾ もほぼ同様の観測を行っている。

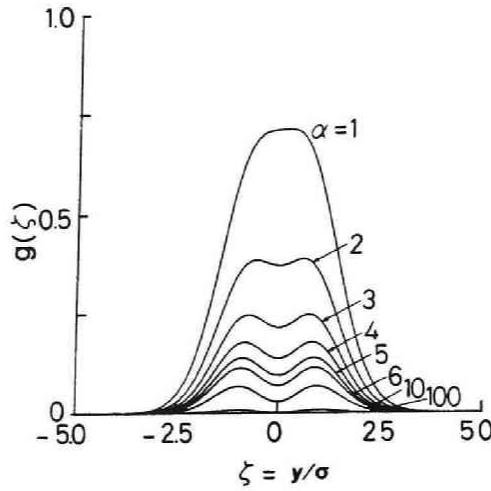


図 1.3.5 $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ プロファイルの自己相似解

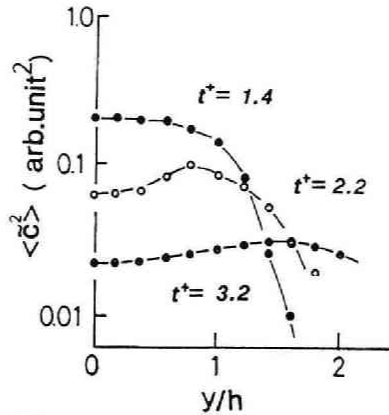


図 1.3.6 $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ プロファイルの流下に伴う変化

$t^* = u^* x / (\langle u \rangle \cdot h)$, $\langle u \rangle = 26.5 \text{ cm/s}$,
 $u^* = 1.34 \text{ cm/s}$, $h = 5.0 \text{ cm}$, $B = 30.0 \text{ cm}$,
 $z = 2.5 \text{ cm}$ における測定

プリューム中央での $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ は図 1.3.7 に示すようにきわめて急速に減衰する。その傾きは $-2.5 \sim -3$ 乗程度にもなるが、これを変動係数表示 ($\sqrt{\langle \tilde{c}^2 \rangle} / \langle c \rangle$) すると図 1.3.8 になる。Okoye²⁴⁾ によれば $\sqrt{\langle \tilde{c}^2 \rangle} / \langle c \rangle$ は瞬間濃度/平均濃度 P_a に比例するとされているから P_a もこの傾き ($\cong -1$) に沿って減衰することになる。

式 (1.3.9) で定められる ϵ_0 は局所等方性が成立するような小スケールの渦によって支配される部分が多い。等方性仮定のもとでは乱れのパワースペク

トル $P_e(\xi)$ が定義でき、次式によって支配される²⁵⁾

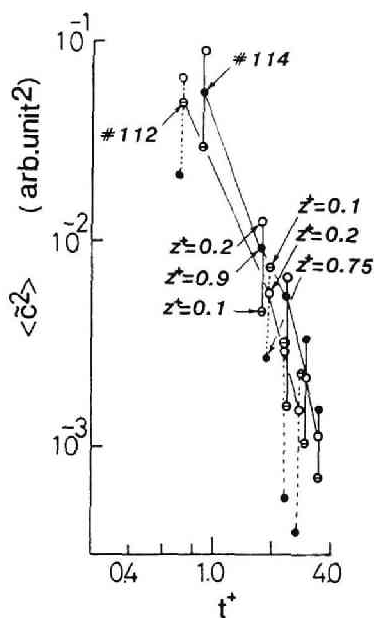


図 1.3.7 $\langle \tilde{c}^2 \rangle$ の流下に伴う減衰

$t^+ = u^* x / (\langle u \rangle \cdot h)$, $z^+ = z/h$, $y = 0.0$ cmにおける測定

#112 : $\langle u \rangle = 42.4$ cm/s, $\langle u^* \rangle = 2.00$ cm/s,
 $h = 3.88$ cm

#114 : $\langle u \rangle = 20.7$ cm/s, $\langle u^* \rangle = 0.857$ cm/s,
 $h = 3.17$ cm

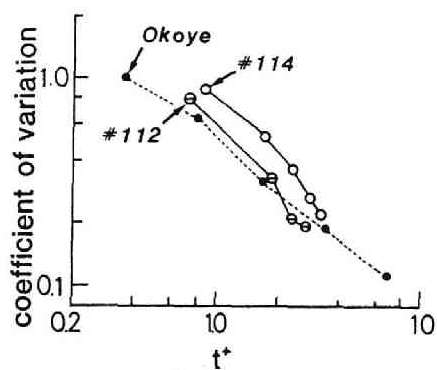


図 1.3.8 $\sqrt{\langle \tilde{c}^2 \rangle} / \langle c \rangle$ の流下に伴う減衰

$$\frac{\partial}{\partial t} P_c(\xi, t) - F(\xi, t) = -2D\xi^2 P_c(\xi, t) \quad (1.3.12)$$

ここに $P_c(\xi, t)$ とは濃度変動の 3 次元パワースペクトル, $T(\xi, t)$ とは濃度, 濃度, 速度の 3 重相関のフーリエ変換で定義されるものであり, この波数 ξ に関する積分 $T(\xi, t)$ は波数空間でのスペクトル・フラックスとなる。

$$T(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, t) d\xi \quad (1.3.13)$$

$P_c(\xi)$ の挙動は ξ の大きさによって異ってくるが, 粘性が流れを支配するようになるコルモゴロフスケール η , 及び分子拡散が混合を支配するようになるコアシンスケール η_c に比べ $1/\xi$ がはるかに大きい時にはエネルギー逸散率 ε , 濃度逸散率 ε_c , 及び波数 ξ によって定まり, 次元解析から

$$P_c(\xi) = \beta \varepsilon_c^{-1/3} \xi^{-5/3} \quad (1.3.14)$$

となる²⁶⁾ η , η_c は

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad \eta_c = \left(\frac{D^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \quad (1.3.15)$$

によって定義され, ν (動粘性係数) $\cong 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, D (分子拡散係数) $\cong 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, $\varepsilon \cong 10^{-1} \sim 10^1 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ (河川), $10^1 \sim 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ (水処理装置) を代入すれば

$$\eta = \begin{cases} 0.18 \sim 0.56 & (\text{河川}) \\ 0.03 \sim 0.18 & (\text{水処理装置}) \end{cases}, \text{ mm}$$

$$\eta_c = \begin{cases} 1.8 \times 10^{-4} \sim 5.6 \times 10^{-4} & (\text{河川}) \\ 3.2 \times 10^{-5} \sim 1.8 \times 10^{-4} & (\text{水処理装置}) \end{cases}, \text{ mm}$$

の大きさをもつ。 β に関し, Taylor²⁷⁾, Takeuchi²⁸⁾ は $0.44 \sim 0.48$ とし Tennekes²⁹⁾ らは約 0.5 としているから, 1 次元スペクトラム $P_{cl}(f)$ では凍

結乱流仮定から

$$P_{c1}(f) = \frac{2\pi}{U} P_{c1}(\xi) = 0.31 \left(\frac{U}{2\pi} \right)^{2/3} \varepsilon_o \varepsilon^{-1/3} f^{-5/3} \quad (1.3.16)$$

となる。ここに $P_o(\xi)$, $P_{c1}(\xi)$ 間には $1.6 P_{c1}(\xi) = P_o(\xi)$ が存在すると仮定²⁰⁾した。図 1.3.9 は $P_{c1}(f)$ の測定例である。式 (1.3.16) を利用すれば ε_o を求

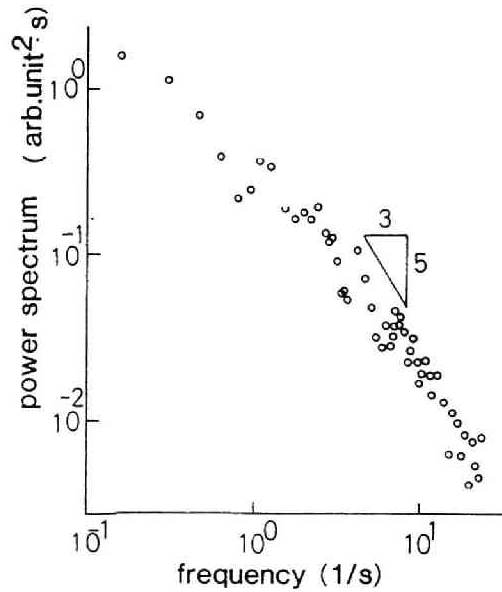


図 1.3.9 濃度変動のパワースペクトル

$\langle u \rangle = 41.2 \text{ cm/s}$, $h = 4.1 \text{ cm/s}$, $x = 120.0 \text{ cm}$
 $z = 0.4 \text{ cm}$ にて測定

めることが可能となる。図 1.3.10 はこの方法から求めたブリューム中央線での ε_o の減衰状況である。なお ε は流速の縦方向構造関数 $D_L(r)$ から求めている。

$$D_L(r) = 2.12 (\varepsilon r)^{2/3} \quad (1.3.17)$$

式 (1.3.12) あるいは式 (1.3.14) は保存性物質を対象としたものであった。非保存性水質のスペクトルに関し、例えば 1 次反応的な減衰を行う物質では、式 (1.3.12) は

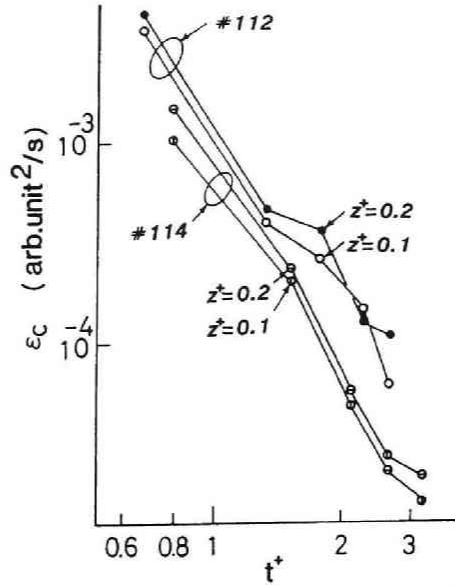


図 1.3.10 濃度変動逸散率 ε_c の流下に伴う変化
 $y = 0.0$ cmにおける測定

$$\frac{\partial}{\partial t} P_c(\xi, t) - F(\xi, t) = -(\kappa + 2D\xi^2) P_c(\xi, t) \quad (1.4.18)$$

となる。反応係数 κ の導入によって濃度減衰効果が濃度乱れの形状に影響を及ぼす最小の距離スケール η_r が定義できる。

$$\eta_r = \left(\frac{\varepsilon}{\kappa^3} \right)^{1/2} \quad (1.3.19)$$

図 1.3.11 は $\kappa = 0.1 \sim 10/d$ とした時の η_r 及び η の関係を示したもので η 及び η_r にはさまり両線からある程度離れた領域でのみ式 (1.3.14) が成り立つ。

式 (1.3.18) にて $1/\xi \cong \eta_r$, 局所平衡が成立する時には $\kappa \gg 2D\xi^2$ として

$$-F(\xi) = \frac{dT}{d\xi} = -\kappa P_c(\xi) \quad (1.3.20)$$

が成立する。 $T(\xi)$ として Kovasznay³⁰⁾ にならい,

$$T(\xi) \propto \xi^{3/2} P_c \cdot P \quad (1.3.21)$$

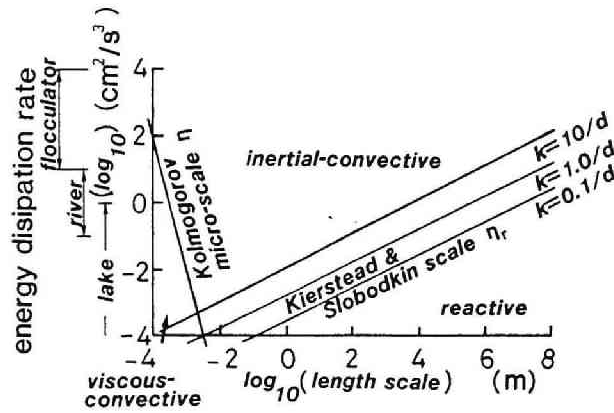


図 1.3.11 反応が濃度変動に影響を及ぼす距離スケール

を仮定し、速度スペクトル $P(\xi)$ に慣性小領域での形状

$$P(\xi) \propto \varepsilon^{\frac{2}{3}} \xi^{-\frac{5}{3}} \quad (1.3.22)$$

を仮定すれば式 (1.3.23) を得る。

$$P_c(\xi) \propto \varepsilon_c \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \xi^{-\frac{5}{3}} \exp \left[-a_1 \varepsilon^{-\frac{1}{3}} (\xi_1^{-\frac{2}{3}} - \xi^{-\frac{2}{3}}) \right] \quad (1.3.23)$$

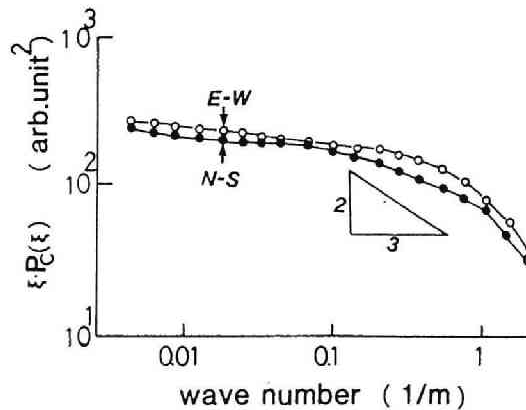


図 1.3.12 クロロフィル a のパワースペクトル

1978年8月23日霞ヶ浦高浜入。E-Wは東西方向の、N-Sは南北方向の走査を意味する。走査線は512組(各々が512個のデータから成る)あり、図は各組から求められたパワースペクトルの平均値である。安岡ら³¹⁾による測定データを使用した。

式(1.3.23)の a_1 , ξ_1 は定数であり, $\xi_1 \ll \xi$ とする。式(1.3.23)から $\epsilon > 0$ の時には $\epsilon = 0$ の時に成立する $-5/3$ 乗線にくらべ下に凸の曲線を描き, $\epsilon < 0$ の時には上に凸の曲線を描く。図1.3.12は霞ヶ浦高浜入にて航空撮影から得られたクロロフィルaのパワースペクトル(660~670 μ mの反射スペクトル計測から求める)であり, $\epsilon < 0$ に対応する上に凸の曲線を描いていることがわかる。

以上, 本節では乱流に原因する濃度変動の特性をいくつか取り上げ, 実験などに基づいた検討を行った。変動の原因には, この他に負荷変動, 水理水文量の変動によるものがあり, 実験場ではこれらが渾然として存在する。このことは水質挙動の定量的解析を困難にしている大きな原因の一つであるが, それらのうち解析が可能なものがあるならば極力これを行い水質監視の科学性確立に寄与しなければならない。今後もより一層の研究が必要と考えられる分野である。

引用文献

- 1) Fick, A. (1855): On liquid diffusion. Philos. Mag., 4 (10), 30-39.
- 2) 建設省 (1980): 流域別下水道整備総合計画調査, 指針と解説. 日本下水道協会.
- 3) Monin, A. S. (1959): On the boundary on the earth surface for diffusion pollution. Advances in Geophysics, 6, 435-436.
- 4) 合田健 (1956): 上水浄化における水理学上の基礎的諸問題. 京都大学学位論文.
- 5) Taylor, G. I. (1953): Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proc. R. Soc. London, Ser. A 219, 186-203.
- 6) Taylor, G. I. (1954): The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. Proc. R. Soc. London, Ser. A 223, 446-468.
- 7) Aris, R. (1956): On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. Proc. R. Soc. London, Ser. A 235, 67-77.
- 8) Elder, J. W. (1959): The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. J. Fluid Mech., 5, 544-560.
- 9) Fischer, H. B. (1966): Longitudinal dispersion in laboratory and natural streams. Technical Report, KH-R-12, California Institute of Technology, Pasadena.
- 10) Fischer, H. B. (1969): The effect of bends on dispersion in streams. Water Resour. Res., 5, 496-506.
- 11) Valentine, E. M., and Wood, I. R. (1977): Longitudinal dispersion with dead zones. Proc. ASCE, Hydraul. Div.,

103, 975-990

- 12) Fisher, H. B. (1972) : Mass transport mechanisms in partially stratified estuaries. *J. Fluid Mech.*, 53, 671-687.
- 13) Okubo, A. (1967) : The effect of shear in an oscillatory current on horizontal diffusion from an instantaneous source. *Int. J. Oceanol. Limnol.*, 1 (3), 194-204.
- 14) Holley, E. R., Harleman, D. R. F., and Fisher, H. B. (1970) : Dispersion in homogeneous estuary flow. *Proc. ASCE, Hydraul. Div.*, 96 (HY8), 1691-1709.
- 15) Bischoff, K. B., and Levenspiel, O. (1962) : Fluid dispersion-generalization and comparison of mathematical models - II, comparison of models. *Chem. Eng. Sci.*, 17, 257-264.
- 16) Wissler, E. (1969) : On the applicability of the Taylor - Aris axial diffusion model to tubular reactor calculations. *Chem. Eng. Sci.*, 24, 527-539.
- 17) 合田健 (1970) : 水質の変化とその予報に関する研究 (2), 2次元等流としての厳密な解析について. 第6回衛生工学研究討論会講演論文集, 140-150.
- 18) Hinze, J. O. (1975) : *Turbulence*. Mc Graw-Hill, New York.
- 19) Saffman, P. G. (1962) : The effect of wind shear on horizontal spread from instantaneous ground source. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 88 (378), 382-393.
- 20) モーニン・ヤグロム (1978) : 統計流体力学3. 山田豊一・中野徹訳, 文一総合出版, 東京.
- 21) Canale, R. P., Auer, M. T., and Matsuoka, Y. (1984) : Optimal cost control strategies for attached algae. *Proc. ASCE, Environ. Eng. Div.*, 109 (EE6), 1225-1242.

- 22) Csanady, G. T. (1973) : Turbulent diffusion in the environment. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland.
- 23) 松岡 譲 (1978) : 河川くぼみ部の水質交換特性について. 土木学会論文報告集, 280, 39-50.
- 24) Okoye, J. K. (1970) : Characteristics of transverse mixing in open-channel flows. Rep. KH-R-23, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- 25) Corrsin, S. (1951) : The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. J. Aeronaut. Sci., 18(6), 417-423.
- 26) Corrsin, S. (1951) : On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. J. Appl. Phys., 22(4), 469-473.
- 27) Taylor, R. J. (1961) : A new approach to the measurement of turbulent fluxes in the lower atmosphere. J. Fluid Mech., 10(3), 449-458.
- 28) Takeuchi, K. (1962) : On the nondimensional rate of dissipation of turbulent energy in the surface boundary layer. J. Meteor. Soc. Japan, Ser. 2, 40(3), 127-135.
- 29) Tennekes, H., and Lumley, J. L. (1972) : A first course in turbulence. The MIT Press, Cambridge.
- 30) Kovaszny, L. S. G. (1948) : Spectrum of locally isotropic turbulence. J. Aeronaut. Sci., 15(12), 745-753.
- 31) 安岡善文・宮崎忠国 (1979) : 遠隔計測による露ヶ浦の定量的水質計測 (クロロフィル a の定量). 国立公害研究所研究報告, 第 6 号, 85-93.

第 2 章 浮遊性物質の水質モデル

本章において対象とするものは水中に存在する種々の物質のうち、水に不溶解性でしかも浮遊状態で存在する固体状の粒子である。粒子状物質の取り扱いには衛生工学を始め多くの分野においてしばしば問題とされてきておりその重要性を主張する研究は枚挙するいとまもない。そうした浮遊性粒子をめぐる種々の問題の中で本章において取り扱ったものは

(1) 沈降圧密作用

(2) 凝集・破壊作用

であり、それらに対する物理機構に基づいた数理モデルの開発を試みている。また、モデル（基礎方程式）開発に先立ち本章では、粒子状物質がもつ離散性とそれに伴ういくつかの問題点を取り上げ、それを考慮した時の水質濃度観測の問題、あるいは基礎式導出の問題について論じている。その後浮遊性粒子に関し問題となる上記の 2 現象のモデル化とその数値シミュレーションについて詳細な検討を行った。通常、この 2 つの現象は別々に生起するものではなく、両作用が相まって浮遊性粒子としての特異性が発揮され、その観点からのモデル化も行なわれている¹⁾が、本研究においてはもっぱら取り扱いの簡明性、検証の容易さの点から、別々に検討を行っている。

沈降・圧密あるいは凝集・破壊と一口に称しても、それらは基となるいくつかの素プロセスが複合し発現したものである。したがって本章においてもそうした素プロセスに対する理論的・実験的検討を行い、モデル化を行なうと共に、それらを総合化する手法としての基礎方程式及びその数値シミュレーションについて充分の注意を払った。

図 2.1.1 は本章において行った検討をフローチャートとして示したものであり、本章の概容を示すものでもある。

なお本章は全 3 節からなり、第 2.1 節では浮遊性物質の連続体としての取り扱いとそれに基づく基礎方程式の導出、第 2.2 節では前節にて導出した基礎方程式の鉛直方向一次元場への適用として沈降圧密現象に対するものを、第 2.3 節では凝集・破壊現象に対する数理モデル化を行なう。第 2.1，2.2 節においては浮遊性物質の液相部あるいは粒子同志の運動量交換がその中心課題となり、

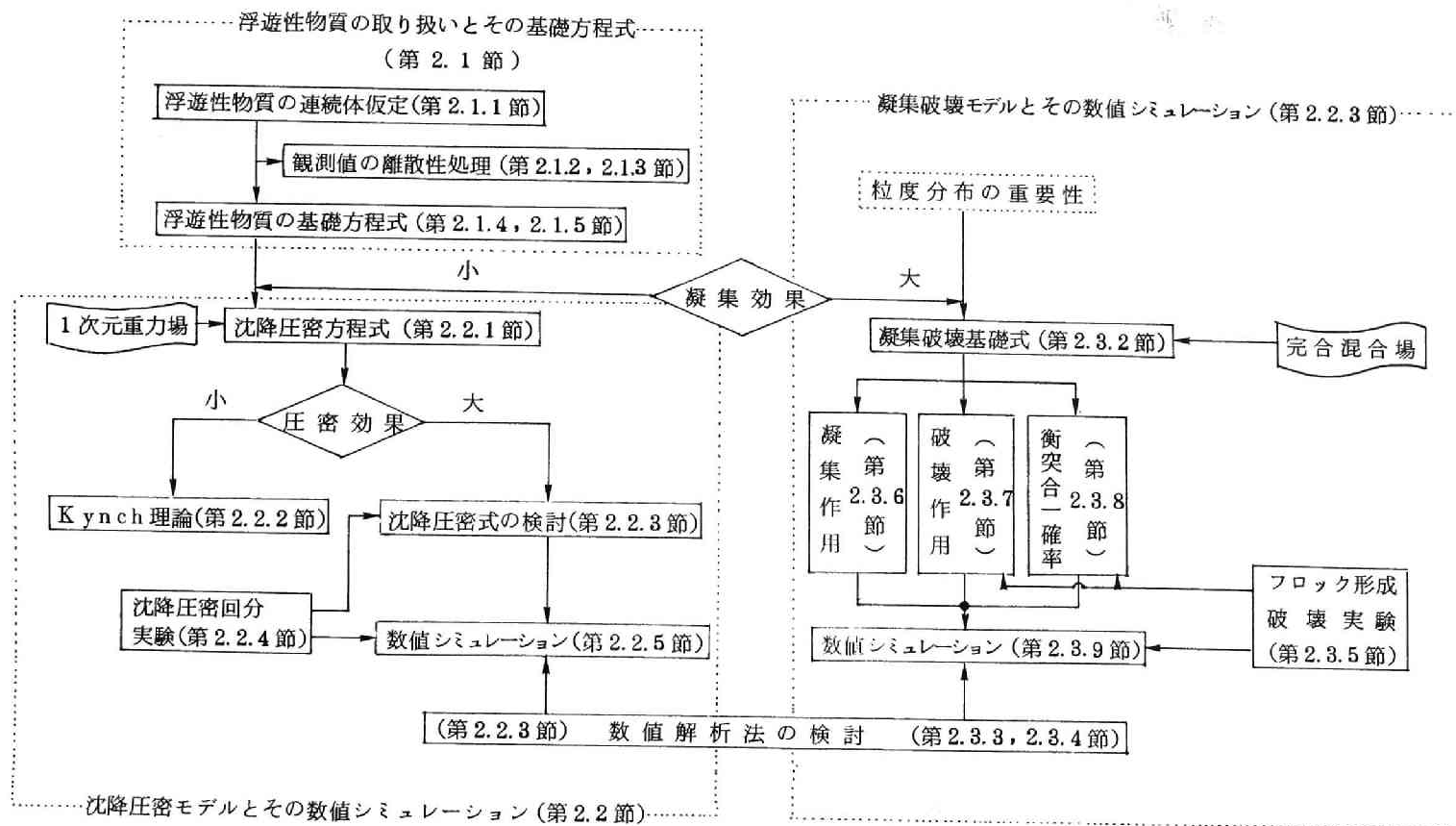


図 2.1.1 本章のフローチャート

第 2. 3 節においては粒子同志の集合・離散による 粒度分布の変化が中心となる。本章にて両者は必ずしも有機的に結びついたものではない。しかるに両者は素プロセスの段階から深く関連し合っており、このレベルにまでさか昇った両現象の統一的な取り扱い法の開発が強く望まれる所である。

2.1 浮遊性物質の理論的取り扱いとその基礎方程式

本節では浮遊性物質を個々の粒子の集りではなく連続体として取り扱うことを考える。連続体と近似するためには何らかの平均化操作によってその粒々性を蔽いかぶす必要があるが、本節ではその方法として Anderson⁹⁾ が創始した重み付き局所平均化法を採用し、この手法の平均操作としての諸特性を詳細に検討する。この重み付き局所平均化操作は水質計測にて通常考えられ、行われている観測概念・操作と比較的似かよったものであるが、一方、局所平均化の距離スケールが粒径スケールに近付いたり、平均化空間の中の粒子数が少ない場合には連続体仮定は適用できず、体積濃度は粒子の配置等によって大きく変動する。その変動特性は種々の因子に影響されるが粒子粒度分布もその一つである。

以上の観点に立ち本節で得た結果は次の通りである。

- (1) 浮遊性物質の連続体としての取り扱いを検討し、さらにその離散性による計測値の変動を利用することによって粒度分布パラメータの推定を行う方法を示した。(第 2.1.1 ～ 2.1.3 節)
- (2) 浮遊性物質を連続体として取り扱う場合の基礎方程式を導出した。(第 2.1.4, 2.1.5 節)

2.1.1 浮遊性物質の連続体としての取り扱い

浮遊性物質、あるいは一般的に多相流を取り扱うにあたっては、各相を巨視的に見て連続体と仮定する場合が多い。そうした連続体としての基礎方程式は直観的にも導出されるが個々の粒子及び媒体の質量保存式・運動方程式等を何らかの方法で平均化することによっても得られる。平均化手法としては乱流理

論の影響を受け Frankl が時空間平均を行ったのがその始めであるが、その後、重み付き空間平均、統計的平均などの手法など様々な方法が開発された²⁾。いま $\langle f(x) \rangle$ によって $f(x)$ の平均をあらわすことにし、空間的あるいは統計的平均の代表的なものをあげてみると

$$\langle f(x) \rangle_1 = \frac{1}{L^3} \int_{x_1 - \frac{1}{2}L}^{x_1 + \frac{1}{2}L} dx'_1 \int_{x_2 - \frac{1}{2}L}^{x_2 + \frac{1}{2}L} dx'_2 \int_{x_3 - \frac{1}{2}L}^{x_3 + \frac{1}{2}L} dx'_3 f(x') \quad (2.1.1)$$

$$\langle f(x) \rangle_2 = \iiint_V g(x-x') f(x') dV_{x'} \quad (2.1.2)$$

$$\langle f(x) \rangle_3 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_j(x) \quad (2.1.3)$$

などが提唱されている。ここに $g(x)$ とは対象となる領域 V において

$$\iiint_V g(x) dV_x = 1 \quad (2.1.4)$$

でありかつ $g(x) \geq 0$ であるような観測重みを表わす関数である。また f_0 は f の統計的実現を示すものであり、式 (2.1.3) はそのアンサンブル平均を行うことを示している。さらに、固相を示す関数として次の $U(x)$ を定義しておく。これは

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{位置 } x \text{ が固相の時} \\ 0, & \text{位置 } x \text{ が液相の時} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

として定義され、固液界面の幾何学的条件である次式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u_{\text{int}} \nabla U = 0 \quad (2.1.6)$$

ここに u_{int} は固液界面の移動速度である。

この $U(x)$ を使用すれば，物理量 $A(x)$ の固相平均量，あるいは液相平均量は上に示した式 (2.1.2) の平均化操作の定義式を使い次のように定めることができる。

$$\langle A(x) \rangle^p (1 - e(x)) = \int_V U(x') A(x') q(x - x') dV_{x'} \quad (2.1.7)$$

$$\langle A(x) \rangle^l e(x) = \int_V (1 - U(x')) A(x') q(x - x') dV_{x'} \quad (2.1.8)$$

ここに上付き添字 p は固相を， l は液相を示し， $e(x)$ とは

$$e(x) = \int_V (1 - U(x')) q(x - x') dV_{x'} \quad (2.1.9)$$

で定義される間隙率である。

さて，このように平均化操作，あるいは平均量の定義を定めることによって粒子状物質を連続体として取り扱う準備ができたことになるが，これによって算出される各示強変数 $\langle A(x) \rangle^p$ ， $\langle A(x) \rangle^p (1 - e(x))$ 等が連続体の特性量として有用であるためには，これらが平均化操作になるべく依存しない方が望ましい。その一つの条件としては平均化のスケール ($q(x)$ の減少するスケール) を L として

$$\frac{\partial \langle A(x) \rangle^l}{\partial L} \cong 0, \quad \frac{\partial \langle A(x) \rangle^l e(x)}{\partial L} \cong 0 \quad (2.1.10)$$

があげられるが，逆に論ずれば L を上記の条件を満たすように選択しなければいけないことになる。 L を規定する要因としては小スケール側からは粒子径，粒子間平均距離などがあり，大スケール側からは水質濃度分布に基づく混合むら，あるいはプランクトンなどの生物粒子^{3),4)}の場合に見られるパッチネスなどがあげられる。これらのスケール間の関係を例えば体積濃度 $\phi(x) = 1 - e(x)$ を例にとって L との関係で示したものを図 2.1.2 に示す。つまり小スケール側

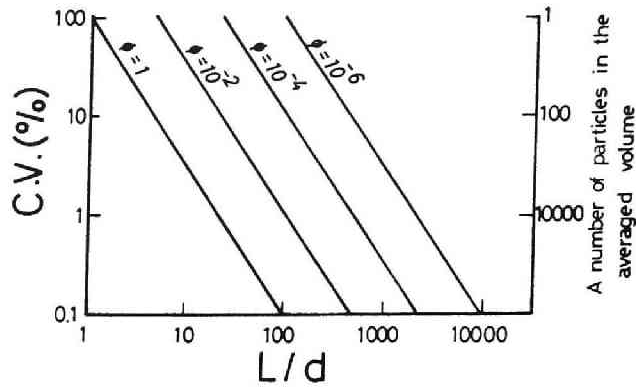


図 2.1.2 濃度観測に伴なうゆらぎ

粒径 d ，観測スケール L 。球型粒子を仮定しそれらが空間内にランダムに配置している時の観測体積濃度のばらつきを変動係数 ($C.V.$) によって示す。粒子分布が式 (2.1.14) によって示されるとすれば

$$C.V. = \sqrt{\frac{d^3}{\phi L^3}}$$

では平均化される粒子の個数が少ないため，スケールの変化によって平均体積濃度 $\langle \phi \rangle$ は大きく変動している。また大スケール側では水質分布のマクロ的な変動に追従する動きを示すようになり点 x 付近の量としての意義が薄弱となってくる。図 2.1.3 は，これを別の観点から記したものであり，水中において

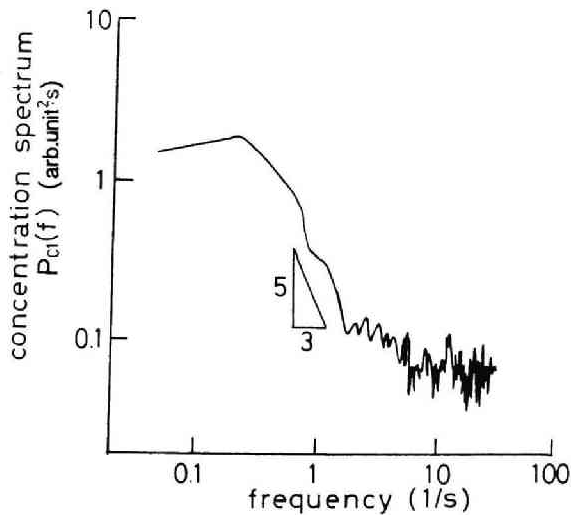
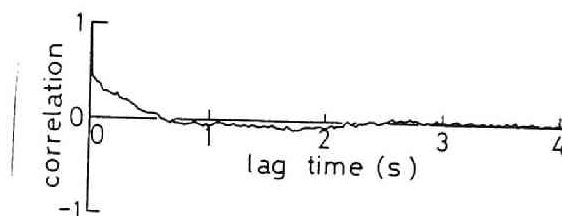


図 2.1.3 (a) 濃度観測値のスペクトル

流速 42.4 cm/s ，ポリ塩化ビニル
 $d = 0.0125 \sim 0.0177 \text{ cm}$



(b) 濃度観測値の自己相関係数

ブリューム状に放出されている粒子状物質の体積濃度変動スペクトルと自己相関係数を示したものである。高波数域の白色ノイズ状の部分が図 2.1.2 の小スケール側での変動に、低波数側の負の傾きをもった部分が水質濃度のマクロ的な空間変動に対応していることになる。

2.1.2 浮遊性物質観測に伴うゆらぎとその解析

上に述べたように粒子性が問題となる水質の観測にあたっては、それを連続量として取り扱おうかぎり、何らかの平均化操作が必要となる。ここではこの操作によって除去されてしまう変動成分と粒子群特性との関連について検討を加えておく。

体積 V の水塊中から検水を採取しその体積を U_ϵ とする。 V 中の N 個の粒子の配置がまったくランダムであるとすれば、検水中に粒子 n 個が含まれる確率 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} \prod_{i=1}^n P_i(U_\epsilon) \prod_{i=1}^{N-n} P_i(V - U_\epsilon) \quad (2.1.11)$$

となる。ここに $P_i(U_\epsilon)$ とは体積 U_ϵ 中に $(i-1)$ 個の粒子が存在する時、さらにもう一つの粒子がそれに付け加わる確率であり、粒子体積 U_d が U_ϵ , V にくらべはるかに小さいと仮定できる時には

$$P_i(U_\epsilon) = \frac{U_\epsilon}{V} \quad (2.1.12)$$

によって近似できる。この場合、 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} \left(\frac{U_\epsilon}{V} \right)^n \left(1 - \frac{U_\epsilon}{V} \right)^{N-n} \quad (2.1.13)$$

なる2項分布となる。さらに、 N が非常に大きく $V \gg U_\epsilon$ の時にはこの式は次のポアソン分布

$$P(n) = \frac{1}{n!} (n_o U_\epsilon)^n \exp(-n_o U_\epsilon) \quad (2.1.14)$$

となる。ここに n_o は

$$n_o = \frac{N}{V} \quad (2.1.15)$$

である。また上記の操作によって計測される体積濃度 ϕ の期待値 $E(\phi)$ は U_d を粒子体積として

$$E(\phi) = E\left(\frac{nU_d}{U_\epsilon}\right) = \frac{U_d E(n)}{U_\epsilon} = \frac{NU_d}{V} \quad (2.1.16)$$

となり水塊全体での平均濃度と一致するが、その分散 $\text{Var}(\phi)$ については、

$$\text{Var}(\phi) = E[(\phi - E(\phi))^2] = \frac{U_d^2 n_o}{U_\epsilon} \quad (2.1.17)$$

となって粒子が V 中に一様に分布しているにもかかわらず、観測される濃度はちらばりを示すことになる。図 2.1.2 に示す曲線はこの様子を示したものであり、式 (2.1.16), (2.1.17) から求められる ϕ の変動係数 $C.V.$ を表わしている。

$$C.V. = \frac{\text{Var}(\phi)}{E(\phi)} = \left[\frac{1}{U_\epsilon u_o} \right]^{1/2} \quad (2.1.18)$$

さて以上の議論は粒子体積 U_d が一定であり、局所的な空間平均に関する重み $g(x)$ が一定値（前項の平均操作 $\langle \rangle_1$ に対応する）の場合であったが、さ

らにこれらの条件を緩和した場合の検討を行う。いま V 中の任意の点 x の濃度 $\phi(x)$ を粒子体積 U_k ($k=1, 2, \dots, N$) と粒子位置 x_k によって

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^N U_k g(x - x_k) \quad (2.1.19)$$

によって表わすことにする。式 (2.1.19) の $g(x)$ は式 (2.1.2) 中に含まれるそれとはほぼ一致する。さらにその物理的意義から

$$g(x) = 0, \quad |x| > R \quad (2.1.20)$$

と仮定すると $\phi(x)$ の確率分布 $P(\phi(x))$ は

$$P(\phi(x)) = \sum_{n=0}^N P(n) P_n(\phi(x)) \quad (2.1.21)$$

によって計算ができる。ここに $P_n(\phi(x))$ とは x を中心とする半径 R の球の中に、 n 個の粒子が存在するときの $\phi(x)$ の確率分布であり $P(n)$ は式 (2.1.14) によって示されている。特性関数法を使えば $P_n(\phi(x))$ は i を虚数単位として

$$P_n(\phi(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\phi s} \prod_{k=1}^n E[\exp(i U_k g(x - x_k) s)] ds \quad (2.1.22)$$

と書くことができる。積分中に含まれる期待値が空間平均値と等しいと仮定すると

$$E[\exp(i U_k g(x - x_k) s)] = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty f_U(U) \int_{U_R} \exp(i U g(x - x') s) dV_{x'} dU \quad (2.1.23)$$

を得る。ここに U_R とは x を中心とする半径 R の球であり $f_U(U)$ とは体積粒度 U の分布である。式 (2.1.14), (2.1.22), (2.1.23) を式 (2.1.21) に

代入すると

$$\begin{aligned}
 P(\phi) &= \sum_{n=0}^N \frac{(n_o U_R)^n}{n!} \exp(-n_o U_R) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\phi s} \frac{3}{4\pi R^3} \\
 &\quad \int_0^\infty f_U(U) dU \int_{U_R} \exp(iU q(x') s) dV_{x'} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\phi s + n_o \int_0^\infty f_U(U) dU \int_{U_R} \{\exp(iU q(x') s \\
 &\quad - 1\} dV_{x'}\} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\phi s + n_o \sum_{j=1}^\infty \frac{(is)^j}{j!} \int_0^\infty f_U(U) U^j dU \cdot \\
 &\quad \int_{U_R} q^j(x') dV_{x'}\} ds \quad (2.1.24)
 \end{aligned}$$

となるから $P(\phi)$ の特性関数 $\Phi(s)$ としては次式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
 \Phi(s) &= \int_{-\infty}^\infty \exp(i\phi s) P(\phi) d\phi \\
 &= \exp\left\{n_o \sum_{j=1}^\infty \frac{(is)^j}{j!} \int_0^\infty f_U(U) U^j dU \int_{U_R} q^j(x') dV_{x'}\right\} \\
 &\quad (2.1.25)
 \end{aligned}$$

したがって $P(\phi)$ の j 次半不変係数 λ_j は式 (2.1.25) から

$$\lambda_j = n_o \int_0^\infty f_U(U) U^j dU \int_{U_R} q^j(x') dV_{x'} \quad (2.1.26)$$

となり観測濃度 ϕ の j 次中心モーメント $M_\phi(j)$ 及び粒子分布の j 次非中心モーメント $M'_U(j)$ の間には

$$M_\phi(2) = \lambda_2 = n_o M'_U(2) \int_{U_R} q^2(x') dV_{x'} \quad (2.1.27)$$

$$M_\phi(3) = \lambda_3 = n_o M'_U(3) \int_{U_R} q^3(x') dV_{x'} \quad (2.1.28)$$

$$M_\phi(4) = \lambda_4 + 3 \lambda_2 = n_o \left[M'_U(4) \int_{U_R} q^4(x') dV_{x'} + M'_U(3) \cdot \int_{U_R} q^3(x') dV_{x'} \right] \quad (2.1.29)$$

などの関係がなければならない。1 次モーメントについては ϕ の 1 次非中心モーメントを $M'_\phi(1)$ とすると

$$M'_\phi(1) = E(\phi) = \lambda_1 = n_o \int_0^\infty f_U(U) U dU \quad (2.1.30)$$

が成立し観測体積濃度の期待値は粒子の平均体積に個数密度の期待値 n_o を乗じたものと一致する。

このように平均化操作によって切り落される変動成分には粒度分布の各種モーメントに関する情報が含まれていることがわかったがそれでは逆にこうした変動を測定することによって粒度分布に関する情報を得ることができないであろうか。以下この点について検討を加える。

まず水質濃度測定センサーとして図 2.1.4 に示すような透過光測定装置を考える。光束中に粒子が存在せず、溶媒のみの時の透過光量を I_o 、 n 個の粒子が光束中に存在しそれらによる遮光後の光量を I とすれば、遮光量 ΔI は、 n_o が

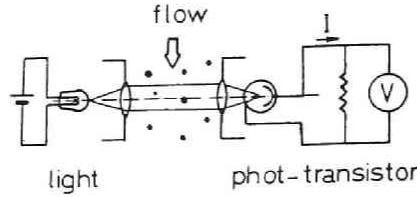


図 2.1.4 測定端子の模式図

小さく重り合いの影響が小さいときに

$$\Delta I = I_0 - I = \sum_{k=1}^n s_k \pi(x_k) \quad (2.1.31)$$

によって表わすことができる。ここに s_k , x_k とは第 k 粒子の断面積, 及び位置であり, $\pi(x_k)$ とは遮光位置によるセンサーの応答特性及び遮蔽係数などを総括し表現したものである。上に述べた計算によれば ΔI の各次モーメントと粒子の断面積分布 $f_s(s)$ の間には次の関係が存在する。

$$E(\Delta I) = n_0 \int_0^{\infty} f_s(s) s ds \int_{U_\varepsilon} \pi(x') dV_{x'} \quad (2.1.32)$$

$$M_{\Delta I}(2) = n_0 \int_0^{\infty} f_s(s) s^2 ds \int_{U_\varepsilon} \pi^2(x') dV_{x'} \quad (2.1.33)$$

$$M_{\Delta I}(3) = n_0 \int_0^{\infty} f_s(s) s^3 ds \int_{U_\varepsilon} \pi^3(x') dV_{x'} \quad (2.1.34)$$

ここに U_ε とは光束によって占られる体積を示す。式 (2.1.32) ~ (2.1.34) に関しいくつかの簡単な例をあげてみる。

(1) 粒度 s , 及び $\pi(x)$ が一定である (但し光束外では 0) の時。

$$f_s(s) = \delta(s - s_0) \quad (2.1.35)$$

$$\pi(x) = \begin{cases} \pi_o & (U_\varepsilon \text{ 内}) \\ 0 & (U_\varepsilon \text{ 外}) \end{cases} \quad (2.1.36)$$

とすると ΔI の各次モーメントは

$$E(\Delta I) = n_o s_o \pi_o U_\varepsilon \quad (2.1.37)$$

$$M_{\Delta I}(2) = n_o s_o^2 \pi_o^2 U_\varepsilon \quad (2.1.38)$$

$$M_{\Delta I}(3) = n_o s_o^3 \pi_o^3 U_\varepsilon \quad (2.1.39)$$

.....

となる。したがって面積粒度 s_o は

$$s_o = \frac{M_{\Delta I}(2)}{E(\Delta I) \pi_o} \quad (2.1.40)$$

によって求めることができる。

(2) $\pi(x)$ については(1)と同じであるが、 $f_s(s)$ が 0 以外の分散をもつ時。上と同様にして

$$E(\Delta I) = n_o \pi_o U_\varepsilon \int_0^\infty f_s(s) s \, ds \quad (2.1.41)$$

$$M_{\Delta I}(2) = n_o \pi_o^2 U_\varepsilon \int_0^\infty f_s(s) s^2 \, ds \quad (2.1.42)$$

$$M_{\Delta I}(3) = n_o \pi_o^3 U_\varepsilon \int_0^\infty f_s(s) s^3 \, ds \quad (2.1.43)$$

.....

となる。 $f_s(s)$ を対数正規分布と仮定すると

$$E(\Delta I) = n_o \pi_o U_\epsilon s_g \exp(2 \ln^2 \sigma_g) \quad (2.1.44)$$

$$M_{\Delta I}(2) = n_o \pi_o^2 U_\epsilon s_g^2 \exp(8 \ln^2 \sigma_g) \quad (2.1.45)$$

$$M_{\Delta I}(3) = n_o \pi_o^3 U_\epsilon s_g^3 \exp(18 \ln^2 \sigma_g) \quad (2.1.46)$$

.....

を得る。ここに $f_s(s)$ は

$$f_s(s) = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} s_g \ln \sigma_g} \cdot \exp \left[- \frac{(\ln s - \ln s_g)^2}{8 \ln^2 \sigma_g} \right] \quad (2.1.47)$$

であり s_g は幾何平均断面積, σ_g は粒径の幾何標準偏差 (84.13 % 径と 50 % 径の比) である。したがって粒度分布のパラメータ s_g, σ_g は

$$s_g = \frac{M_{\Delta I}(2)^4}{E(\Delta I)^{5/2} M_{\Delta I}(3)^{3/2} \pi_o} \quad (2.1.48)$$

$$\ln^2 \sigma_g = \frac{1}{4} \ln \frac{M_{\Delta I}(3) E(\Delta I)}{M_{\Delta I}(2)^2} \quad (2.1.49)$$

として ΔI の変動から求めることが可能である。

2.3.1 実験的検討

式 (2.1.32) ~ (2.1.34) の実験的検討として本研究では図 2.1.5 に示すような光電式濃度計を自作し, ポリスチレン等の粒子を対象した検討を行っ

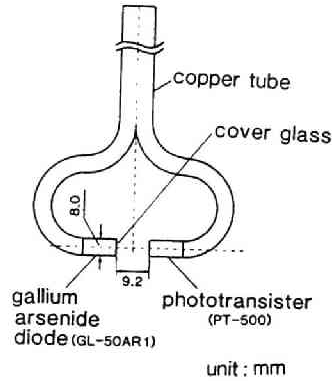


図 2.1.5 測定端子

ている。同様の濃度計は既に本間ら⁵⁾, Bhattacharaya ら⁶⁾, あるいは道上ら⁷⁾によっても試作されているが, これらはいずれも濃度の測定として使用されたものであり, 本節で述べているような粒度特性の解析に使用されたものではない。また松本⁸⁾は本研究と類似な方法によって粒子粒径を測定する方法の提案しているが, 検討は1次モーメントに留まりまた使用した端子などもここに示すものとはかなり異ったものである。測定は粒子を含んだ検水約2 lをガラスビーカー中にて強攪拌することによって行われた。出力は直流増幅器を通しデータレコーダに記録しAD変換後, 計算機処理が施された。その際のサンプリング間隔は0.016秒であり各測定につき1000データの採取を10回繰り返している。図2.1.6は使用した粒子の粒度分布で, 分散が小さい対数正規型をしている。検討の第一はこれらの粒子を単分散系とみなし次の手順によって行われた。

(1) 図2.1.6に示す5種の粒子のうち1種を検定粒子として式(2.1.32)に含まれるセンサー特性に関する定数 ($\int_{U_\epsilon} \pi(x) dV_x$ など), 及び濃度-出力検定曲線を求める。(図2.1.7)

(2) 粒径未知と仮定した残りの4粒子について

$$d_{e1} = \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{M \Delta I(2)}{E(\Delta I)} \cdot \frac{\int_{U_\epsilon} \pi(x') dx'}{\int_{U_\epsilon} \pi^2(x') dx'} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.50)$$

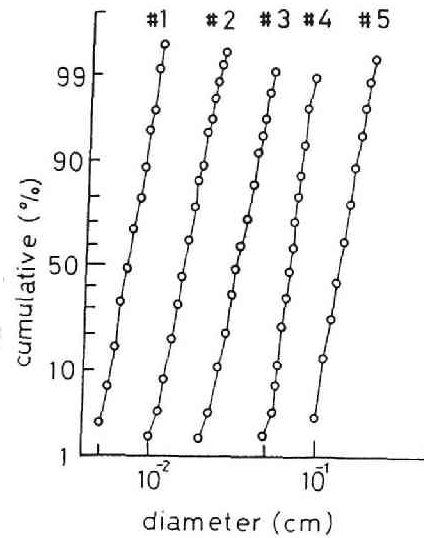


図 2.1.6 粒度分布-I

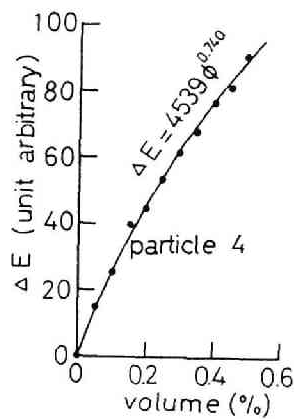


図 2.1.7 濃度出力検定曲線
 ΔE とは出力電圧を示す。

によって推定粒径 d_{e1} を求める。

(3)濃度を変えて(2)の操作を繰り返す。

表 2.1.1 にその結果を示すが推定値 d_{e1} は 50 % 粒径 d_{50} にくらべ若干大きく算出されていることがわかる。また、濃度の影響に関しては、体積濃度 0.01~0.5 % 間にて 6 段階の測定を行いその時に得られた d_{e1} の標準偏差 $\sigma_{d_{e1}}$ を記しているが、濃度変化による系統的な偏差は見られない。図 2.1.8 に以上の結

表 2.1.1 本実験で使用了た粒子特性とその推定値

粒 子 番 号	Na 1	Na 2	Na 3	Na 4	Na 5	Na 6	Na 7	Na 8
材 質	アンバーライト	ポリスチレン	ポリスチレン	ポリスチレン	ポリスチレン	ポリスチレン	ポリスチレン	ポリスチレン
比 重	1.50	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05
50 % 径 d_{50} (cm)	0.0069	0.015	0.032	0.066	0.13	0.055	0.048	0.045
幾何標準偏差 σ_g	1.16	1.20	1.19	1.09	1.15	1.29	1.54	1.67
推定 50 % 径 d_{e1} (cm)	0.0091	0.0175	0.035	—	0.124	0.113	—	0.080
d_{e1} の標準偏差* σ_{de1} (cm)	0.0030	0.0052	0.0081	—	0.054	—	—	—
推定 50 % 径 d_{e2} (cm)	—	0.0142	0.030	—	—	0.091	—	0.039
推定 σ_g σ_{ge}	—	1.30	1.25	—	—	1.31	—	1.63
$\exp\{-3 \ln^2 \sigma_g\}$	1.07	1.11	1.10	1.02	1.06	1.22	1.75	2.20
備 考	検定用				検定用			

* 試験濃度を 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5% (v/v) の 6 通りに変化した場合, 他の時には 0.05% v/v を標準とする。

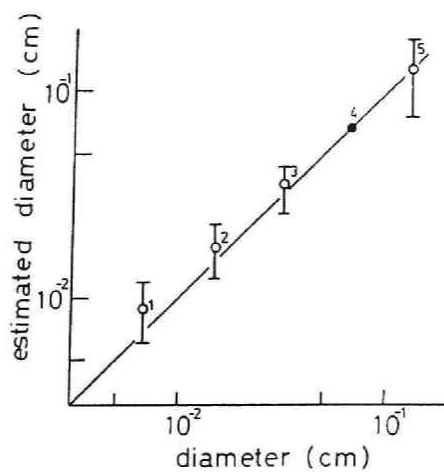


図 2.1.8 平均粒径の推定 - I
数字は粒子番号を示す

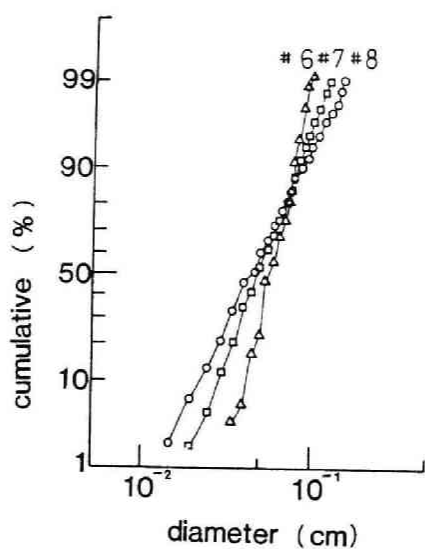


図 2.1.9 粒度分布 - II

果を示している。

次に分散を有する粒子の例としては上記の粒子を混合したものを用いた。図 2.1.9 にその粒度分布を示している。検討は上に示した方法と同じく、1種の粒子を検定粒子とすることによりセンサー特性定数を求めた後に、他の粒子の

代表径，及び分散度を算出した。粒度分布モデルとして対数正規分布を仮定すれば，その推定幾何標準偏差 σ_{ge} は

$$\ln^2 \sigma_{ge} = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{M_{\Delta I}(3) E(\Delta I)}{M_{\Delta I}(2)^2} - \ln \frac{\int_{U_\epsilon} \pi^3(x') dV_{x'} \int_{U_\epsilon} \pi(x') dV_{x'}}{\int_{U_\epsilon} \pi^2(x') dV_{x'}^2} \right] \quad (2.1.51)$$

によって求めることができる。この σ_{ge} を使えば，推定 50 % 粒径 d_{e2} は

$$d_{e2} = d_{e1} \exp \{ -3 \ln^2 \sigma_{ge} \} \quad (2.1.52)$$

となる。ここに式 (2.1.51) 右辺第2項は検定によって予め得られる量である。表 2.1.1，図 2.1.10 に式 (2.1.51)，(2.1.52) によって得られた結果を示す。

以上，水中粒子の粒度分布を図 2.1.5 に示すようなセンサーによって測定する方法に関し実験的検討を行なった。その結果，ポリスチレン粒子などの比較的球形に近くまた材質が一樣な粒子についてはその有効性を示し得たと考えるが，一般水系及び水処理施設などで問題となる集塊性の粒子などでは，その形

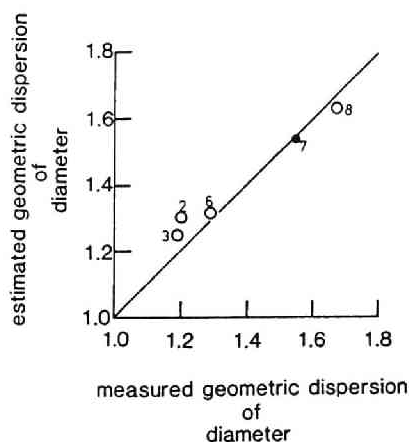


図 2.1.10 (a) 粒度分布の分散の推定
数字は粒子番号を示す

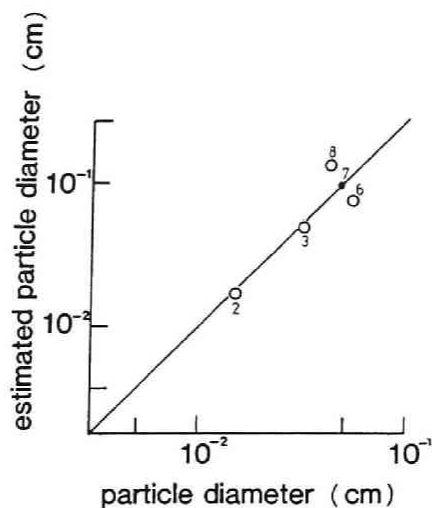


図 2.1.10 (b) 平均粒径の推定 - II
数字は粒子番号を示す

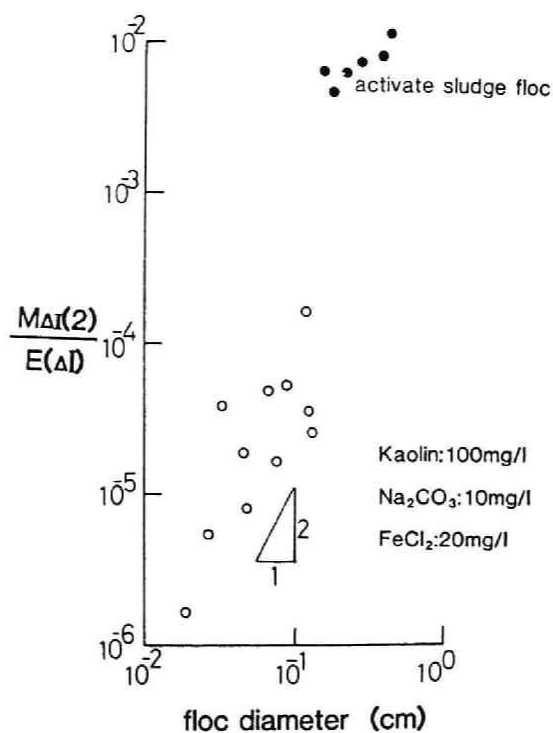


図 2.1.11 平均粒径の推定 - III
フロックの場合

状，光学的特性などが粒子によって様々であり，上記の検討によって触れ得なかった種々の要因を通じて測定結果の劣化をもたらすことが予想される。例えば，図 2.1.11 はブロック粒子を対象にこの方法を適用したものであるが，ポリスチレン粒子の時にくらべはるかに大きなちらばりを見せている。したがってここに示した方法を粒度分布特性の計測法として実用化するためにはこれらの問題点をさらに解決する必要がある。

2.1.4 浮遊性物質に関する基礎方程式

粒子及びそれを取りまく媒体の挙動が，それぞれ個々の粒子の運動をあらわす運動方程式及び媒体の連続・運動方程式によって記述されることは勿論である。但しそれらの方程式を実際に運用するには先に述べた平均化手法によって取り扱い易い形に書き直しておく方がよい。

ここでは平均化手法として式 (2.1.7)，(2.1.8)，(2.1.9) を採用することにし，その性質を検討する。すなわち Reynolds の条件あるいは Gauss 則などの成立を確かめる。まず積分の加法性から k を l あるいは p として

$$\langle A(x) + B(x) \rangle^k = \langle A(x) \rangle^k + \langle B(x) \rangle^k \quad (2.1.53)$$

は成立するが，平均操作の局所性から

$$\langle \langle A(x) \rangle^k \cdot B(x) \rangle^k = \langle A(x) \rangle^k \cdot \langle B(x) \rangle^k \quad (2.1.54)$$

は成立しない。しかし c を定数とした時に

$$\langle c \rangle^k = c \quad (2.1.55)$$

は当然成立する。次に平均操作の時間微分については例えば固相平均の場合，

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A(x) \rangle^p (1-e) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V U(x') q(x-x') A(x') dV_{x'}$$

$$= \int_V q(x-x') A(x') \frac{\partial}{\partial t} U(x') + U(x') q(x-x') \frac{\partial}{\partial t} A(x') dV_{x'} \quad (2.1.56)$$

となるが，式 (2.1.6) から

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x') = -u_{\text{int}}(x') \cdot \nabla U(x') \quad (2.1.57)$$

の関係があるから，これを式 (2.1.56) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle^p (1-e) &= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle^p (1-e) - \int_S u_{\text{int}}(x') A(x') \cdot \\ &\quad q(x-x') ds_{x'} \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

を得る。ここに ds とは粒子表面にて液相から固相に向けて立てた単位面積素分である。同様にして液相平均の場合では

$$\frac{\partial}{\partial t} [\langle A \rangle^l e] = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle^l e + \int_S u_{\text{int}}(x') A(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.59)$$

となる。空間微分については

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle A \rangle^p (1-e)] &= \int_V U(x') A(x') \frac{\partial}{\partial x_j} q(x-x') dV_{x'} \\ &= - \int_V U(x') A(x') \frac{\partial}{\partial x'_j} q(x-x') dV_{x'} \\ &= - \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x'_j} \{ U(x) A(x) q(x-x') \} - A(x') q(x-x') \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x'_j} U(x') - q(x-x') U(x') \frac{\partial}{\partial x'_j} A(x') \right] dV_{x'} \\ = - (1-e) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} A \right\rangle^p + \int_S A(x') q(x-x') n_j \cdot ds_{x'} \quad (2.1.60)$$

を得る。ここに上式の展開においては

$$\frac{\partial}{\partial x_j} q(x-x') = - \frac{\partial}{\partial x_j} q(x-x') \quad (2.1.61)$$

を使用した。また n_j とは x_j 方向の単位ベクトルである。したがって上式から平均の空間微分に関する公式として

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \langle A \rangle^p (1-e) \} = (1-e) \left\langle \frac{\partial A}{\partial x_j} \right\rangle^p + \int_S A(x') q(x-x') \\ \cdot n_j \cdot ds_{x'} \quad (2.1.62)$$

を得る。同様にして液相におけるそれは

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \langle A \rangle^l e \} = e \left\langle \frac{\partial A}{\partial x_j} \right\rangle^l - \int_S A(x') q(x-x') n_j \cdot ds_{x'} \quad (2.1.63)$$

となる。すなわち平均操作に関するレイノルズ条件などはそのままでは使用できずその代替として上に記したものを使う必要がある(表 2.1.2)。

それではこうした操作を用いて固相・液相の支配方程式はどのような形となるか。まず液相の連続式から検討してみる。

液相の連続式としてはその真密度 ρ^l が変化しないと仮定し液相部流速 u^l に関する次式を採用する。

$$\nabla \cdot u^l = 0 \quad (2.1.64)$$

表 2.1.2 浮遊性水質の連続体仮定に関する諸操作規則

操 作 規 則	公 式
Reynolds の条件	$\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$ $\langle \langle A \rangle B \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$ $\langle C A \rangle = C \langle A \rangle \quad C \text{ は定数}$ $\langle C \rangle = C$
Reynolds の条件の系	$\langle \langle A \rangle \rangle \neq \langle A \rangle$ $\langle A' \rangle = 0 \quad \text{但し } A'(x', x) = A(x') - \langle A(x) \rangle \text{ として } x' \text{ について平均化する}$ $\langle \langle A \rangle \langle B \rangle \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$ $\langle \langle A \rangle B' \rangle \neq 0$
Leibniz の規則	$\frac{\partial}{\partial t} [\langle A \rangle^p (1-e)] = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle^p (1-e) - \int_S u_{\text{int}}(x') A(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.58)$
	$\frac{\partial}{\partial t} [\langle A \rangle^l e] = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle^l e + \int_S u_{\text{int}}(x') A(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.59)$
Gauss の規則	$\frac{\partial}{\partial x_j} [\langle A \rangle^p (1-e)] = \langle \frac{\partial A}{\partial x_j} \rangle^p (1-e) + \int_S A(x') q(x-x') n_j ds_{x'} \quad (2.1.62)$
	$\frac{\partial}{\partial x_j} [\langle A \rangle^l e] = \langle \frac{\partial A}{\partial x_j} \rangle^l e - \int_S A(x') q(x-x') n_j ds_{x'} \quad (2.1.63)$

これに $q(x-x')(1-U(x'))$ を乗じ 対象となる領域にて積分を行えば,

$$e(\nabla \cdot u^l >^l = 0 \quad (2.1.65)$$

あるいは, これに式 (2.1.63) の関係を使用して

$$\nabla \cdot \{ < u^l >^l e \} = - \int_S u^l(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.66)$$

となるが, 間隙率 e の時間微分が

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{ e < 1 >^l \} = \int_S u_{\text{int}}(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.67)$$

となることを考えあわせると

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \{ < u^l >^l e(x) \} = - \int_S \{ u^l(x') - u_{\text{int}}(x') \} \\ \cdot q(x-x') ds_{x'} \end{aligned} \quad (2.1.68)$$

を得る。ここに右辺の $(u^l(x) - u_{\text{int}}(x)) ds_{x'}$ とは粒子表面 ds_x を通って固相に移動する体積を示すが, この移動量が 0 であると仮定すると液相の連続式としては

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \{ < u^l >^l e \} = 0 \quad (2.1.69)$$

を得る。固相の連続式についても同様の検討を行うことによって

$$\frac{\partial (1-e)}{\partial t} + \nabla \cdot \{ < u^p >^p (1-e) \} = 0 \quad (2.1.70)$$

となる。ここに u^p とは固相の流速である。

運動量関係については, まず液相において次式の成立を仮定する。ここに τ^l とは液相内での応力テンソルであり, G^l とは体積力を示す。

$$\rho^l \frac{\partial u^l}{\partial t} + \rho^l \nabla \cdot (u^l u^l) = \nabla \cdot \tau^l + G^l \quad (2.1.71)$$

これに $q(x-x')(1-U(x'))$ を乗じ積分すると左辺は ρ^l (一定と仮定) を除いて

$$\begin{aligned} e \left\langle \frac{\partial u^l}{\partial t} \right\rangle^l + e \left\langle \nabla \cdot (u^l u^l) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (e \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l u^l \rangle^l) \\ &\quad - \int_S u_{\text{int}}^l u^l q(x-x') ds_{x'} + \int_S u^l u^l q(x-x') ds_{x'} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (e \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l u^l \rangle^l) \end{aligned} \quad (2.1.72)$$

となる。ここで $e \langle u^l u^l \rangle^l$ に関しては、 $u^l(x')$ を観測点 x における平均値 $\langle u^l(x) \rangle^l$ とそれからの変動 $u^{l'}(x', x)$ と分けて考えることにすると

$$\langle u^l u^l \rangle^l = \langle u^l \rangle^l \cdot \langle u^l \rangle^l + \langle u^{l'} u^{l'} \rangle^l \quad (2.1.73)$$

但し

$$u^{l'}(x', x) = u^l(x') - \langle u^l(x) \rangle^l \quad (2.1.74)$$

となるから式 (2.1.72) 左辺は結局

$$\rho^l \left[\frac{\partial}{\partial t} (e \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l \rangle^l \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^{l'} u^{l'} \rangle^l) \right] \quad (2.1.75)$$

となる。また右辺第1項の応力項は

$$e \langle \nabla \cdot \tau^l \rangle^l = \nabla \cdot e \langle \tau^l \rangle^l + \int_S \tau^l(x') q(x-x') ds_{x'} \quad (2.1.76)$$

となり液相間の応力のやり取りに関する左辺第1項、及び固・液間でのやり取

りに関する左辺第2項の二つの項に分けられるが、特に前者に関しては

$$\nabla \cdot e \langle \tau^l \rangle^l = e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \langle \tau^l \rangle^l \cdot \nabla e \quad (2.1.77)$$

となる。 ∇e は e の定義式から

$$\begin{aligned} \nabla e &= \nabla_x \int_V (1-U(x')) q(x-x') dV_{x'} \\ &= - \int_V (1-U(x')) \nabla_{x'} q(x-x') dV_{x'} \\ &= - \int_V \nabla_{x'} \{ (1-U(x')) q(x-x') \} dV_{x'} - \int_S q(x-x') ds_{x'} \\ &= - \int_S q(x-x') ds_{x'} \end{aligned} \quad (2.1.78)$$

であるから結局

$$\begin{aligned} e \langle \nabla \cdot \tau^l \rangle^l &= e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l - \langle \tau^l \rangle^l \int_S q(x-x') ds_{x'} + \int_S \tau^l \cdot \\ &\quad q(x-x') ds_{x'} \\ &= e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \int_S (\tau^l(x) - \langle \tau^l(x) \rangle^l) \cdot \\ &\quad q(x-x') ds_{x'} \\ &= e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \int_S \tau^{l'}(x', x) q(x-x') ds_{x'} \end{aligned} \quad (2.1.79)$$

を得る。応力テンソルに関する上記の変形は厳密なものであったが、この項に関連してしばしば行なわれている試みは、これを一様場におかれた粒子への抗力と結び付けようとするものである。この場合には $\tau^l(x)$ の分解方法として

上記のような $\tau^{l'}(x', x)$ の替わりに

$$\tau^{l*}(x) = \tau^{l'}(x, x) = \tau^l(x) - \langle \tau^l(x) \rangle^l \quad (2.1.80)$$

なる $\tau^{l*}(x)$ を定義し

$$\int_S \tau^{l*}(x') q(x-x') ds_{x'}$$

を中心とした検討を進める方が都合よい。上記の項は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \int_S \tau^{l*}(x') q(x-x') ds_{x'} &= \int_S (\tau^l(x') - \langle \tau^l(x') \rangle^l) q(x-x') ds_{x'} \\ &= e \langle \mathcal{P}(\tau^l - \langle \tau^l \rangle^l) \rangle^l - \mathcal{P}[e \langle \tau^l \rangle^l - e \langle \langle \tau^l \rangle^l \rangle^l] \\ &= e \langle \mathcal{P} \tau^l \rangle^l - e \langle \mathcal{P} \langle \tau^l \rangle^l \rangle^l - \mathcal{P}[e \langle \tau^l \rangle^l - \\ &\quad e \langle \langle \tau^l \rangle^l \rangle^l] \end{aligned} \quad (2.1.81)$$

いま、近似的に

$$\langle \langle \tau^l \rangle^l \rangle^l = \langle \tau^l \rangle^l \quad (2.1.82)$$

が成立すると仮定するならば上式の第3項は0となり、さらに

$$\langle \mathcal{P} \langle \tau^l \rangle^l \rangle^l = \mathcal{P} \langle \tau^l \rangle^l \quad (2.1.83)$$

を仮定すれば

$$\int_S \tau^{l*}(x') q(x-x') ds_{x'} = e \langle \mathcal{P} \tau^l \rangle^l - e \mathcal{P} \langle \tau^l \rangle^l \quad (2.1.84)$$

を得る。この関係は Anderson ら⁹⁾, Rietema ら¹⁰⁾が用いたものと同じであり、彼らの操作では Reynolds の条件を無条件に使用するために容易に導出されるが、これが近似的にのみ成立することは上に述べた所から明らかである。式(2.1.84)を仮定すれば、式(2.1.71)右辺第1項は

$$e \langle \nabla \cdot \tau^l \rangle^l = e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \int_S \tau^{l*}(x') \varphi(x-x') ds_{x'} + T_A^l \quad (2.1.85)$$

となる。ここに T_A^l とは式 (2.1.84) を仮定する際の誤差である。

式 (2.1.76) 右辺第1項は式 (2.1.77) における展開からわかるように $e \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l$ 及び $\langle \tau^l \rangle^l \nabla e$ の2項からなる。このうち最初の項は液相が受けもつ応力伝播の項としてその解釈が容易であるが後の項については多くの議論がなされている。Sha ら¹¹⁾ はこれに $(1-B)$ を乗じ粒子密度変化による応力拡散の状況からみて B 値を $0 \sim 1$ の間で変化すべきことを提案している。また Gidaspow ら¹²⁾, Jackson ら¹³⁾ はこの項に対する注意深い検討が必要であることを述べているが何ら具体的な提案をおこなっていない。

最後に右辺第2項は $e \langle G^l \rangle^l$ であるから、以上の展開を合わせ液相部の運動方程式として、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l \rangle^l \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l u^l \rangle^l) \\ = \frac{e}{\rho^l} \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \frac{1}{\rho^l} \int_S \tau^{l*}(x', x) \varphi(x-x') ds_{x'} + \frac{e}{\rho^l} \langle G^l \rangle^l \end{aligned} \quad (2.1.86)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l \rangle^l \langle u^l \rangle^l) + \nabla \cdot (e \langle u^l u^l \rangle^l) \\ = \frac{e}{\rho^l} \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l + \frac{1}{\rho^l} \int_S \tau^{l*}(x') \varphi(x-x') ds_{x'} + \frac{e}{\rho^l} \langle G^l \rangle^l \\ + \frac{T_A^l}{\rho^l} \end{aligned} \quad (2.1.87)$$

を得る。ここに T_A^l は平均化操作に伴って生ずる残差である。

次に固相の運動方程式としては個々の粒子に成立する運動方程式である

$$\rho^P \frac{du_i^P}{dt} = f_i^P + h_i^P + G_i^P \quad (2.1.88)$$

が基本となる。ここにサフィックス i とは第 i 粒子を示し V^P, f^P, h^P, G^P とはそれぞれ粒子体積，液相から受ける力，固相から受ける力，及び体積力を単位体積当りに換算した量をあらわす。式 (2.1.88) から固相に関する運動方程式を導くには，液相と同じように平均化の重みを乗じ積分すればよいが，今，第 2.1.1 節において示したように， $q(x)$ の減衰に関する距離スケール（平均化スケール）が粒径スケールに比べはるかに大きい時にはこの積分は近似的に各粒子での積分量を加え合わせたものと一致する。すなわち，粒子内にて定義された量 $A(x)$ について

$$\int_V U(x') q(x-x') A(x') dV_{x'} = \sum_{i=1}^N V_i q(x-x_i) A(x_i) \quad (2.1.89)$$

が成立する。ここに N とは粒子個数を示し x_i によって粒子位置を示す。上の簡略式を使えば式 (2.1.88) 左辺は (ρ^P (一定と仮定) ははぶく)，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N V_i q(x-x_i) \frac{du_i^P}{dt} &= \int_V U(x) q(x-x') \left(\frac{\partial u^P}{\partial t} + u^P \nabla \cdot u^P \right) dV_x \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \{ (1-e) \langle u^P \rangle^P \} + \nabla \cdot \{ (1-e) \langle u^P \rangle^P \langle u^P \rangle^P \} \\ &\quad + \nabla \cdot \{ (1-e) \langle u^{P'} u^{P'} \rangle^P \} \end{aligned} \quad (2.1.90)$$

となる。但し上式の展開においては，連続の条件 $\nabla \cdot u^P = 0$ 及び界面を通じ物質移動がなく粒子の変形もない条件である $u^P = u_{\text{int}}$ を使用した。次の式 (2.1.88) の右辺は $q(x-x_i)$ を乗じ i について加え合わせることによって

$$\sum V_i q(x-x_i) \{ f_i^P + h_i^P + F_i^P \} = (1-e) \langle f^P \rangle^P + (1-e)$$

$$\langle h^P \rangle^P + (1-e) \langle G^P \rangle^P$$

(2.1.91)

となるから，固相の運動方程式全体としては

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ (1-e) \langle u^P \rangle^P \} + \nabla \cdot \{ (1-e) \langle u^P \rangle^P \langle u^P \rangle^P \} + \nabla \cdot \\ \{ (1-e) \langle u^{P'} u^{P'} \rangle^P \} = \frac{1}{\rho^P} (1-e) \langle f^P \rangle^P + \frac{1}{\rho^P} (1-e) \langle h^P \rangle^P \\ + \frac{1}{\rho^P} (1-e) \langle G^P \rangle^P \end{aligned} \quad (2.1.92)$$

を得る。いっぽう粒子内部から見れば f^P, h^P も区別はない。今，Truedell・Toupin¹⁴⁾ にならって粒子が受ける外力を粒子内部の応力テンソル $\tau^P(x)$ によって表わすことにすれば，

$$f^P + h^P = \nabla \cdot \tau^P(x) \quad (2.1.93)$$

となる。したがって式(2.1.79)と同じように考えると式(2.1.92)右辺第1, 2項は

$$(1-e) \{ \langle f^P \rangle^P + \langle h^P \rangle^P \} = (1-e) \langle \nabla \cdot \tau^P \rangle^P = (1-e)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \tau^P \rangle^P - \langle \tau^P \rangle^P \nabla e - \int_S \tau^P(x') q(x-x') ds_{x'} \\ = (1-e) \nabla \cdot \langle \tau^P \rangle^P - \int_S \tau^{P'}(x, x') q(x-x') ds_{x'} \end{aligned}$$

(2.1.94)

となる。あるいは，式(2.1.85)と同様にして

$$(1-e) \{ \langle f^p \rangle^p + \langle h^p \rangle^p \} = (1-e) \nabla \cdot \langle \tau^p \rangle^p - \int_S \tau^{p*}(x') \cdot q(x-x') ds_{x'} + T_A^p \quad (2.1.95)$$

を得る。ここに T_A^p は平均化操作に基づく残差である。式 (2.1.95) はさらに、応力の伝達機構に対応して

$$\begin{aligned} (1-e) \{ \langle f^p \rangle^p + \langle h^p \rangle^p \} &= (1-e) \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l - \int_S \tau^{l*}(x') \\ &\cdot q(x-x') ds_{x'} + (1-e) \nabla \cdot (\langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l) \\ &- \int_S (\tau^{p*} - \tau^{l*}) q(x-x') ds_{x'} + T_A^p \end{aligned} \quad (2.1.96)$$

と記すことができる。ここに右辺第1,2項がほぼ $(1-e) \langle f^p \rangle^p$ に、第3,4項がほぼ $(1-e) \langle h^p \rangle^p$ に対応している。粒子間同志に接触がなく粒子表面を通じての運動量交換がすべて流体を介して行われる時には粒子表面内外における流速、応力テンソル間にいわゆる運動量跳躍条件である

$$\begin{aligned} (\rho^p u^p (u^p - u_{\text{int}}) - \tau^p) \cdot n &- (\rho^l u^l (u^l - u_{\text{int}}) - \tau^l) \cdot n \\ &= \sigma \kappa n \end{aligned} \quad (2.1.97)$$

が成立する¹⁾。ここに σ は表面張力、 κ は界面の平均曲率であり、 n は界面から粒子内部に向けた単位法線である。さらに粒子の変形を考慮せず流体に粘性流体が仮定できるような場合では界面にて

$$u^p = u^l = u_{\text{int}} \quad (2.1.98)$$

であるから跳躍条件は結局

$$(\tau^l - \tau^p) \cdot n = \sigma \kappa n \quad (2.1.99)$$

となる。上式は界面における運動量の境界条件を定めるものとして重要であるが、局所量で記述しているために式 (2.1.96) とはなじみにくい。したがって平均量によって記述される条件によってこれの代替とすることを考えなければならぬ。Rietema ら⁷⁾ はこれに関し次のように考えた。 τ^p は粒子同志の直接的な運動量の交換メカニズムがない限り粒子の運動に対して無関係である。したがって τ^p は粒子内にて実際に発生している応力とは無関係に定めてもよいことになり計算の都合がよいものを選ぶことができる。この議論から敷衍すれば、 τ^p は τ^l の粒子内部への仮想的な延長と考えることができ、さらに式 (2.1.96) 右辺第 3, 4 項をほとんど 0 とするような τ^p の配置も可能となる。この議論が實際上正当なものかどうかは明らかでない点もあるが、いずれにせよ式 (2.1.96) 右辺第 3, 4 項は粒子間の直接的な運動量交換がおこらない限り無視することが可能であろう。さらにこの項に関しては式 (2.1.96) のような変形を行わずに

$$\nabla \cdot (1-e) [\langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l] = T_A^p + T_A^l \quad (2.1.100)$$

に留めておく方が都合よい場合が多い。以上の変形結果を式 (2.1.92) に代入すると固相の運動方程式としては

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ (1-e) \langle u^p \rangle^p \} + \nabla \cdot \{ (1-e) \langle u^p \rangle^p \langle u^p \rangle^p \} + \nabla \cdot \{ (1-e) \langle u^{p'} u^{p'} \rangle^p \} &= \frac{1}{\rho^p} (1-e) \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l - \int_S \tau^{l*}(x') g(x-x') \\ d s_{x'} + \frac{1}{\rho^p} \nabla \cdot (1-e) [\langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l] + \frac{1}{\rho^p} (1-e) \cdot \\ \langle G^p \rangle^p - T_A^l & \end{aligned} \quad (2.1.101)$$

を得る。表 2.1.3 は以上の検討で得られた各基礎式を列記したものである。

表 2.1.3 基礎方程式

	変 化 項	移 流 項 (レイノルズ項)	各相間の相互力	異相間の相互力	体 積 力	残差項
液相連続式	$\frac{\partial e}{\partial t}$	$+ \nabla \cdot e \langle u^l \rangle^l$				$= 0$
固相連続式	$\frac{\partial (1-e)}{\partial t}$	$+ \nabla \cdot (1-e) \langle u^p \rangle^p$				$= 0$
液相運動式	$\rho^l \frac{\partial e \langle u^l \rangle^l}{\partial t}$	$+ \rho^l \nabla \cdot e \langle u^l \rangle^l \langle u^l \rangle^l + \rho^l \nabla \cdot e \langle u^{l'} u^{l'} \rangle^l$	$= \nabla \cdot e \langle \tau^l \rangle^l + \int_S \tau^{l*} q(x-x') ds_{x'} + e \langle G^l \rangle^l$			$+ T_A^l$
固相運動式	$\rho^p \frac{\partial (1-e) \langle u^p \rangle^p}{\partial t}$	$+ \rho^p \nabla \cdot (1-e) \langle u^p \rangle^p \langle u^p \rangle^p + \rho^p \nabla \cdot e \langle u^{p'} u^{p'} \rangle^p$	$= (1-e) \langle h^p \rangle^p + (1-e) \langle f^p \rangle^p + (1-e) \langle G^p \rangle^p$			
	$\rho^p \frac{\partial (1-e) \langle u^p \rangle^p}{\partial t}$	$+ \rho^p \nabla \cdot (1-e) \langle u^p \rangle^p \langle u^p \rangle^p + \rho^p \nabla \cdot e \langle u^{p'} u^{p'} \rangle^p$	$= \nabla \cdot (1-e) [\langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l] + (1-e) \nabla \cdot \langle \tau^l \rangle^l$		$- \int_S \tau^{l*} q(x-x') ds_{x'} + (1-e) \langle G^p \rangle^p$	$- T_A^l$

e : 間隙率, l : 液相, p : 固相, u : 各相の真の流速, $\langle u \rangle$: 各相の平均化流速, ρ : 各相の真密度, τ : 応力テンソル,

h^p : 固相間の相互力, f^p : 固相間の相互力, G : 体積力

2.1.5 構成方程式

表 2.1.3 に示した各式は粒子状水質の挙動を記述するうえで必要なものであるが実際の運用にあたってはさらに $\langle \tau^p \rangle^p, \langle \tau^l \rangle^l$ あるいは固液界面を通して伝達される運動量などと, e とか $\langle u^p \rangle^p, \langle u^l \rangle^l$ などの基礎量との関係を明らかにする必要がある。構成方程式の確立である。Drew¹⁵⁾ は構成方程式の作成に関する一般的な検討を行ない, "objectivity" など各種の必要条件をあげているがこれのみによって構成関係を規定するにはきわめて広範囲すぎる。したがって現段階では各項について一つずつその物理性に基づいた検討を行って, その重要性を評価すると共に構成モデルの作成を図っていく必要がある。

まず $\langle \tau^l \rangle^l$ に関しては通常の流体と同じように Newtonian を仮定して

$$\langle \tau^l \rangle^l = -P \mathbf{I} + \mu^{l*} (\nabla \langle u^l \rangle^l + \nabla^T \langle u^l \rangle^l) + r^{l*} \mathbf{I} \nabla \langle u^l \rangle^l \quad (2.1.102)$$

とする場合が多い¹⁶⁾。ここに μ^{l*} は有効粘性係数, r^{l*} は有効第2粘性係数と称されるものであり, \mathbf{I} は単位テンソルである。また P は圧力に対応し T は転置テンソルを示す。液相部, 固相部がいずれも非圧縮性の場合には Stokes の関係, $r^{l*} = 0$ を仮定することもある。 μ^{l*} に関しては Einstein 以来多くの研究がなされており, 粒子濃度が低く粒子表面が滑らかで剛体の仮定を行うことができる時には液相自体の粘性係数 μ^l との間にほぼ次の関係がある。

$$\mu^{l*} = \mu^l [1 + k_e(1-e)] \quad (2.1.103)$$

ここに k_e は Einstein の粘性定数と呼ばれるものであり粒子形状によっては 2.01 ~ 4.49 の範囲の値が報告されている¹⁷⁾ ものの多くの場合はほぼ 2.5 程度の値をとる。

次に固相間の運動量交換項である ($\langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l$) については粉体工学など種々の分野において取り扱われ, さまざまなモデル化が試みられている。例えば粘性流体の仮定^{18), 19)} をおこなえば

$$\begin{aligned} \langle \tau^p \rangle^p - \langle \tau^l \rangle^l = & -P^p \mathbf{I} + \mu^{p*} (\nabla \langle u^p \rangle^p + \nabla^T \langle u^p \rangle^p) + \\ & r^{p*} \mathbf{I} \nabla \langle u^p \rangle^p \end{aligned} \quad (2.1.104)$$

となる。 μ^{p*} , r^{p*} は液相における μ^{l*} , r^{l*} に対応するものであり, P^p は圧力に対応するが後述する沈降濃縮では

$$\sigma = (1 - e) P^p \quad (2.1.105)$$

としてこれを有効応力と称する。その他ビンガム流体としての取り扱い^{20),21)}などもよく知られているが粒子濃度、性状によってその特性は大きく変化する。

レイノルズ項に関してはほとんど不明である。石井²²⁾, Drew²⁾ は乱流理論とのアナロジーからこれのモデル化に言及しているがその当否は定かではない。また通常の取り扱いでは $\langle \tau^p \rangle^p$, $\langle \tau^l \rangle^l$ と区別する必要もなく式(2.1.102), (2.1.104)のモデルなどもレイノルズ項を含んだものと解する方が都合よい。

固液2相間の直接的な運動量交換を示す τ^{l*} の表面積分に関しては個々の粒子に関する流体抵抗の知見からある程度の推定が可能である。但しこの項には $\langle \tau^l \rangle^l$ の場所的な勾配に伴なう表面力は含まれない。粒子濃度が低く粒子付近の流れに対する複数粒子による影響をほとんど無視できる場合には個々の粒子の運動を独立して取り扱うことができる。さらに粒子レイノルズ数が小さいと仮定し $\langle \tau^l \rangle^l$ が一様な場におかれた粒子 i に働く流体力 $V_i f_i^p$ を考えてみると

$$\begin{aligned} V_i f_i^p = & 3\pi\mu^l d_i (\langle u^l \rangle^l - u^p) + \rho^l V_i \frac{d\langle u^l \rangle^l}{dt} \\ & + \frac{1}{2} V_i \rho^l \left(\frac{d\langle u^l \rangle^l}{dt} - \frac{du^p}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.1.106)$$

が成立する。ここに V_i とは粒子 i の体積を示し d_i をその直径とする。但し上

式では Basset 効果は無視し形状を球形としている。したがって式 (2.1.92) に対応する $(1-e) \langle f^P \rangle^P$ は

$$\begin{aligned}
 (1-e) \langle f^P \rangle^P &\cong \sum_{i=1}^N V_i f_i^P g(x-x_i) \\
 &= \frac{18 \mu^l (1-e)}{d^2} (\langle u^l \rangle^l - \langle u^P \rangle^P) + \rho^l e \frac{d \langle u^l \rangle^l}{dt} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho^l e \left(\frac{d \langle u^l \rangle^l}{dt} - \frac{d \langle u^P \rangle^P}{dt} \right) \quad (2.1.107)
 \end{aligned}$$

となる。ここに粒径 d は粒子によらず一定値とみなした。粒子、流体の速度変化が小さい時には右辺第 2, 3 項は無視できストークス項のみが残るが、実際には粒子濃度が大きく流体を通じた粒子同志の干渉が問題となる場合が多い。こうした場合の方法としては補正関数 $e^2 F_1(e)$ を使用し

$$\begin{aligned}
 (1-e) \langle f^P \rangle^P &= \frac{18 \mu^l (1-e)}{d^2} e^2 F_1(e) (\langle u^l \rangle^l - \langle u^P \rangle^P) \\
 &\quad + \dots \dots \quad (2.1.108)
 \end{aligned}$$

として取り扱うものがある。 $F_1(e)$ とは空間率関数と呼ばれているものであり、古くから理論的あるいは実験的な検討が行なわれてきた。例えば石井²³⁾ は 1964 年以前に発表された 40 程度の理論式及び実験式について表示しており、Batchelor²⁴⁾ はその理論的な導出について簡明なレビューを行なっている。抗力特性に関する表現としては、この他透水係数、戸過に関する抵抗係数²⁵⁾、あるいは回分沈降実験によって得られる粒子群の沈降速度などがあるが、これらと本節における抗力表現である

$$- \int_S \tau^{l*} g(x-x') ds_{x'} = F (\langle u^l \rangle^l - \langle u^P \rangle^P) \quad (2.1.109)$$

表 2.1.4 粒子の抵抗則表現に係る諸パラメータ間の関係

抵抗力特性を示す関数	次元	定義式	F	F_1	k	K	f	u_0^p
F	$\frac{M}{L^3 T}$	$-\int_S \tau^{ts} q(x-x') ds x' / (u^L - u^p)$	—	$\frac{18\mu e^2(1-e)F_1}{d^2}$	$\frac{\rho^L e^2 q}{k}$	$\frac{\mu e^2}{K}$	$\frac{\mu(1-e)^2 R_e f}{e d^2}$	$\frac{e^2(1-e)(\rho^p - \rho^L)q}{u_0^p}$
F_1 空間率関数	(—)	$\frac{u_0^p}{u_0^p} \Big _{e=1}$	$\frac{d^2 F}{18\mu e^2(1-e)}$	—	$\frac{d^2 q}{18\nu(1-e)k}$	$\frac{d^2}{18(1-e)K}$	$\frac{R_e f}{18e^3}$	$\frac{(\rho^p - \rho^L)d^2 q}{18\mu u_0^p}$
k 透水係数 (hydraulic conductivity)	$\frac{L}{T}$	$\frac{e(u^L - u^p)}{-\frac{1}{\rho^L} \frac{\partial P_h}{\partial x} q \frac{\partial x}{\partial x}}$	$\frac{\rho^L e^2 q}{F}$	$\frac{d^2 q}{18\nu(1-e)F_1}$	—	$\frac{qK}{\nu}$	$\frac{d^2 q e^3}{(1-e)^2 \nu R_e f}$	$\frac{\rho^L u_0^3}{(1-e)(\rho^p - \rho^L)}$
K 透水係数 (intrinsic conductivity)	L^2	$\frac{\nu k}{q}$	$\frac{\mu e^2}{F}$	$\frac{d^2}{18(1-e)F_1}$	$\frac{\nu k}{q}$	—	$\frac{e^3 d^2}{(1-e)^2 R_e f}$	$\frac{\mu u_0^p}{(1-e)(\rho^p - \rho^L)q}$
f 抵抗係数 (固相部)	(—)	$-\frac{d}{\rho^L(1-e)} \frac{\partial P_h}{\partial x} (u^L - u^p)^2$	$\frac{d^2 e F}{\mu(1-e)^2 R_e}$	$\frac{18e^3 F_1}{R_e}$	$\frac{d^2 q e^3}{(1-e)^2 \nu R_e k}$	$\frac{e^3 d^2}{(1-e)^2 R_e K}$	—	$\frac{e^3(\rho^p - \rho^L)q}{\mu(1-e)R_e u_0^p}$
u_0^p 沈降速度	$\frac{L}{T}$	回分び降実験にて	$\frac{e^2(1-e)(\rho^p - \rho^L)q}{F}$	$\frac{(\rho^p - \rho^L)d^2 q}{18\mu F_1}$	$\frac{\rho^p}{k(1-e)(\frac{\rho^p}{\rho^L} - 1)}$	$\frac{Kq(1-e)(\rho^p - \rho^L)}{\mu}$	$\frac{e^3(\rho^p - \rho^L)q}{\mu(1-e)R_e f}$	—

u^L : 液相実流速, u^p : 固相実流速, μ : 液相粘性係数, ν : 液相動粘性係数, ρ^L : 液相真密度, ρ^p : 固相真密度, e : 空隙率, d : 粒子粒径, q : 重力加速度,
 R_e : 固相部 Reynolds 数 $= e(u^L - u^p)d/\nu/(1-e)$, M : 質量次元, L : 長さ次元, T : 時間次元
 抵抗力特性を示す最左列の関数その他の関数を用いて表現したもの, 例えば F 行, K 行に示された式形から $F = \mu e^2 / K$ がわかる。

によって定義される F との関係を表 2.1.4 に示す。但し表 2.1.4 では平均化を示す記号である $\langle \rangle^l$, $\langle \rangle^p$ は省略している。

2.2 浮遊性物質の鉛直方向一次元モデル

本節では第 2.1 節で導出した浮遊性物質に関する基礎方程式の一応用として鉛直方向一次元的な現象を取り上げ、それに対する適用を試みる。その場合、水自体の移流がほとんど無視できる場を想定すれば、現象は水質稀薄時での沈降、濃縮時での圧密を中心として進行する。両現象は別々に生起するものではなく程度の差はあれ、同時に進行するが、本節では両現象を比較的容易にかつ統一的にモデル化するものとして、

- (1) Kynch 方程式の拡張としての沈降圧密方程式を導出し、2 段階 Lax・Wendroff 法による数値解析の適応性、沈降終了時あるいは沈降末期における濃度分布、界面挙動の解析的取り扱いを検討した(第 2.2.1 ~ 2.2.3 節)。さらに
- (2) 沈降圧密時における濃度分布変化の追跡を数値シミュレーションによって行なう方法の開発を行った(第 2.2.4, 2.2.5 節)。

2.2.1 沈降圧密現象とその基礎方程式

沈降圧密現象は粒子水質を取り扱う典型的な場である。水処理における沈降濃縮処理の重要性は言うまでもないし、また一般の水系中においてもこの現象を通じての底泥と上部の水塊との物質交換は水質汚濁現象に対して大きく影響する。一般水系中においてもそうであるが、水処理において沈降操作は次の 2 つの観点から行われる。²⁶⁾ その第 1 は比較的清澄な原水を槽内に通し固相部を沈降させその上澄み部を得ることを目的とするものである。この場合、中心となる機構は自由沈降である。その 2 は濁質濃度が比較的高いスラリーを対象としてその中に含まれる水分を脱水させることを目的とするものであって以後に続く汚泥処理の第一段階となるものである。この場合には圧密現象が問題とな

る。前者を行う装置をクラリファイヤー、後者のそれをシックナーと呼び区別を行うこともあるが、実際の操作においては程度の差はあるものの両目的を合わせ目ざす。また槽内に発生している機構からみても自由沈降・圧密現象の両者が同時に発生するのが通常である。但しこれらの機構の相対的な重要性は濁質特性、特に粒子の集塊性によって大きく変化する。図 2.2.1 はこれに関連し縦軸に濁質濃度を、横軸に集塊性の強さをとってこれらの現象の模式的な区分化を行ったものである。この図に基づけば槽内に発生する沈降圧縮現象とは、例えばクラリファイヤーでは A 点で示される特性をもった原水を B 点にて処理水として引き抜く操作を意味し、シックナーとしてみれば C 点にて汚泥として引き抜くことを意味する。ただ、槽内に発生している現象はこれのみではなく、流体の流動あるいはそれに伴う巻き上げ等、種々の副次的な効果を受けこれらを総合したものとして表われるが、基本的な機構としてはいわゆる回分沈降試験によって観測される鉛直一次元的な沈降・圧密（圧縮）現象であることは疑いなく、従来の沈降理論^{27),28)}あるいは沈降槽の設計法²⁹⁾においてもこれを基礎とする枠組内での理論形成に努めてきた。回分沈降試験においては通常以下の仮定を前提とする。

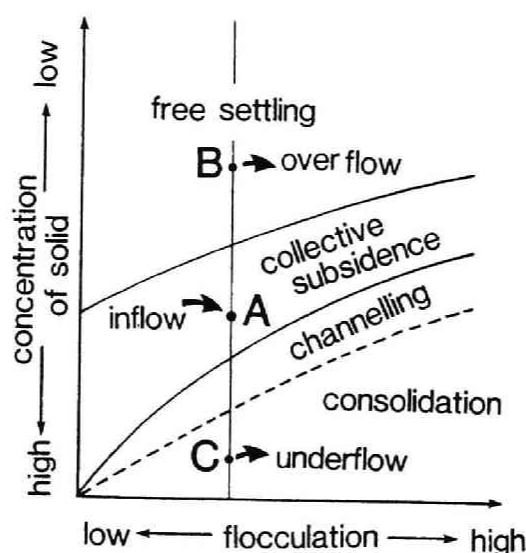


図 2.2.1 沈降様式と集塊性の強さ（模式図）

- (1)現象は鉛直方向一次元のみにて考え水平方向の変動は無視できるものとする。また体積力としては重力のみを考える。
- (2)沈降筒壁面の影響は無視できるものとする。
- (3)筒の上下端での物質の流入は無い。
- (4)攪拌による流動は沈降に関し直接的な影響はない。
- (5)初期濃度分布は一様である。

實際上、上の仮定をすべて満足する実験を行なうことは不可能であり、例えば Michaels³⁰⁾、Vesilind³¹⁾は(2)を中心とし回分沈降試験の問題点について理論的・実験的な検討を行なっているが、ここではひとまずこれらの問題的を考えず、上記の仮定を認めることによって先に述べた粒子状物質の基礎式(表 2.1.3)、構成条件から鉛直方向一次元の沈降圧密の基礎方程式を導くと次のようになる。

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e u^l}{\partial z} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial (1-e)}{\partial t} + \frac{\partial (1-e) u^p}{\partial z} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\rho^l e \left(\frac{\partial u^l}{\partial t} + u^l \frac{\partial u^l}{\partial z} \right) = -e \frac{\partial P}{\partial z} - F(u^l - u^p) + e \rho^l g \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho^p (1-e) \left(\frac{\partial u^p}{\partial t} + u^p \frac{\partial u^p}{\partial z} \right) = & -(1-e) \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} + F(u^l - u^p) \\ & + (1-e) \rho^p g \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ここに z とは鉛直下向きに取られており、平均化に関する記号は省略されている。また、 e は間隙率、 u は流速、 ρ は真密度、 P は圧力、 σ は有効応力、 F は粒子抵抗に関する係数(式(2.1.109))、 g は重力加速度をあらわし、上付き添字 l 、 p はそれぞれ液相、固相を示す。式(2.2.3)、(2.2.4)左辺で

ある慣性項は後に示すように通常の操作においてはほとんど無視することができ、連続式のための非定常性を残す擬似定常的な取り扱いが可能となる。但し沈積面等の濃度急変部付近においては局所的に慣性項の効果が重要となる場合も想定できる。Dixon³²⁾ は固相運動量式である式(2.2.4)にて左辺を残し有効力項を無視した場合の解析を試みているが、Fitch³³⁾ が指摘しているようにこの取り扱いでは問題的が多く発生する。したがって、ここではひとまず上記の擬似定常的な取り扱いを行なうことにすれば、上記の4式は次のように書き直すことが可能となる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u^p}{\partial z} = 0 \quad (2.2.5)$$

$$e u^l + (1-e) u^p = M \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \{ e \rho^l + (1-e) \rho^p \} q - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (2.2.7)$$

$$F(u^l - u^p) = e \left(\rho^l q - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = - e \frac{\partial P_h}{\partial z} \quad (2.2.8)$$

ここに c は $\rho^p (1-e)$ で定義される濁質濃度であり、 M は体積平均速度、 P_h は過剰間隙水圧である。通常、沈降速度の測定においては濃度の勾配をつけず、かつ $\partial \sigma / \partial z$ がほとんど0である場合を想定するからこの場合には式(2.2.7)から

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \{ e \rho^l + (1-e) \rho^p \} q \quad (2.2.9)$$

となる。あるいはこれを式(2.2.8)に代入し $M=0$ とした時に得られる

$$u^p = \frac{e^2 (1-e) (\rho^p - \rho^l) q}{F} \quad (2.2.10)$$

を観測することになる。表2.1.4に示した u_0^p とはこれを示したものである。

一方 $\partial \sigma / \partial z$ 及び M を 0 とできない場合には

$$\begin{aligned} u^p &= M - e (u^l - u^p) = M - \frac{e^2}{F} \left\{ - (1 - e) (\rho^p - \rho^l) g - \frac{\rho^p}{a} \frac{\partial e}{\partial z} \right\} \\ &= M + u_0^p - \frac{e^2}{F a} \frac{\partial c}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となり沈降速度は上記の場合と異なる。ここに a とは

$$a = \frac{dc}{d\sigma} \quad (2.2.12)$$

によって定義される圧縮係数であり σ が c のみの関数であることを仮定している。式 (2.2.11) を式 (2.2.5) に代入すれば

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial U_e c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} D_e \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.2.13)$$

なる移流拡散型の偏微分方程式を得る。ここに U_e は濃度一様時の固相移流速度, D_e は有効応力による圧密係数であり

$$U_e = M + u_0^p = M + k c \left(\frac{1}{\rho^l} - \frac{1}{\rho^p} \right) \quad (2.2.14)$$

$$D_e = \frac{c e^2}{F a} = \frac{k c}{g a \rho^l} = \frac{K c}{\mu \rho^p m_V} \quad (2.2.15)$$

によって定義されるものである。但し m_V は体積圧縮係数 ($= a / \rho^p$) である。式 (2.2.13) の境界条件としては筒の上下端にて固体フラックスを与える条件である

$$U_e c - D_e \frac{\partial c}{\partial z} = M^p \quad (2.2.16)$$

あるいは Dankwerts の境界条件である

$$U_e c - D_e \frac{\partial c}{\partial z} = M c_{\text{in, out}} \quad (2.2.17)$$

を境界の状態に応じて適用すればよい。但し通常の回分沈降試験では仮定(3)から $M = M^P = 0$ となる。連続沈降槽における濃縮部のように $M \neq 0, M^P \neq 0$ であり、かつ定常運転を行なっている場合には式(2.2.16)は境界のみならずいたる所で成立し

$$D_e \frac{dc}{dz} - U_e c = -M^P \quad (2.2.18)$$

が基礎式となる。

式(2.2.13)は松岡ら³⁴⁾によって導かれたものであるが、この他、座標系を固相に付着した Lagrange 系の基礎式を導くことも可能である。表 2.2.1 はそれらのうちの代表的なものを一覧したものである。これらの式型と比較し式(2.2.13)は次の利点を有する。

- (1) 式の各項の物理的意義が明解である。
 - (2) 濁質濃度、Euler 座標を基本量として採用しているために沈降の分野で従来から基礎式として採用されてきた Kynch の式となじみ易い。
 - (3) 稀薄濃度時にて過剰間隙水圧、有効応力、ひずみ等の解釈が困難な場においても容易に使用し得る。
 - (4) 連続操作などの総体流速 M が 0 以外の場においても使用し得る。
- いっぽう、本式の欠点、及び、取り扱い上の問題点としては以下の諸点が考えられる。

- (1) 高濃度時には過剰間隙水圧を基本量とする方が計測上便利である。
- (2) 式(2.2.13)は強い非線型を有し解析的な取り扱いが困難である。また数値解析を行なうにあたってこの点を考慮した取り扱いが必要となる。

2.2.2 Kynch 理論とその批判

粒子同志の直接的な相互作用が小さく圧縮効果を示す右辺の項を 0 と近似で

表 2.2.1 沈降圧密現象の基礎方程式

基本量	基礎式	研究者
ラグランジュ系	過剰間隙水圧 R_h	Terzaghi (1924) ³⁵⁾ 川島(1955), Ingersoll (1955) ³⁷⁾ 矢木ら(1960) ³⁸⁾
		白戸ら(1970) ³⁹⁾ 栗谷ら(1978) ⁴⁰⁾
	有効応力 σ	Kos et al (1975) ⁴¹⁾
	ひずみ ε ($\varepsilon = \frac{e_0 - e}{1 - e}$)	三笠(1963) ⁴²⁾ 本研究基礎式に基づくもの
オイラー系	濁質濃度 c	Kinch (1951) ⁴³⁾
		松岡ら(1979) ³⁴⁾

e : 空隙率, k : 透水係数 (hydraulic conductivity), g : 重力加速度, ρ^F : 固相真密度, ρ^L : 液相真密度,
 u^F : 固相流速, u^L : 液相流速, e_0 : 初期空隙率, u_0^F : 一様場での沈降速度, z, Z, w : 鉛直座標 (下向き),
 $\int_0^Z c(t=0, z) dz = w = \int_0^Z c(t, z) dz$, m_V, m_V' : 体積圧縮係数, $m_V = -de/d\sigma$, $m_V' = d\varepsilon/d\sigma$

きる時には

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \{ (M + u_0^P) c \} = 0 \quad (2.2.19)$$

を得るがこの式にて特に $M=0$ かつ $u_0 = u_0(c)$ としたものを Kynch の式と言う。Kynch⁴³⁾ はこれを用いて回分沈降曲線の解析手法を提案した。この方法は先に発表されていた連続沈降に関する Coe・Clevenger の方法⁴⁴⁾ に対する理論的根拠を与えると共に 1 本の界面沈降曲線から種々の濃度における沈降速度関数 $u_0^P(c)$ を与える手段を提示し実用面から見てもきわめて有効なものであった。この方法はその後多くの研究者、例えば Shannon ら^{45)~48)} の一派によって単分散で剛体仮定が行なえるような泥漿 (ideal slurry, 彼らの実験では $50\mu\text{m}$ 程度のガラスビーズ及び炭酸カルシウム粒子などを使用) によって検証がなされ、Wallis⁴⁹⁾ による解法の一般化、及び Talmage・Fitch⁵⁰⁾、吉岡ら⁵¹⁾、及び Hassett⁵²⁾ による連続沈降槽への拡張と発展された。

Kynch の理論においては固相に関する連続式が基礎式となる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (u_0^P c) = 0 \quad (2.2.20)$$

運動方程式としては定常一様場における沈降速度式

$$u_0^P = u_0^P(c) \quad (2.2.21)$$

が採用される。通常 $u_0^P(c)$ は c の減少関数であるが固相フラックスである $u_0^P c$ は複雑な挙動を示し、時には式 (2.2.20) の特性曲線が合一することもある。あって連続的あるいは不連続的な濃度差で構成される Kinematic wave⁵³⁾ が発生する。その波速は式 (2.2.20) の特性曲線の傾きである

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dS}{dc} \quad (2.2.22)$$

但し $S(c)$ は沈降フラックス $u_0^P c$ とする。によって表わされ、この特性曲線

上では $c = \text{一定}$ となり初期濃度値が伝播される。図 2.2.2 はこれを説明したものであり下に示した $S - c$ 曲線の接線と同じ傾きで $t = 0$ から特性曲線が走査する。但し底面 0 ではこれに接近してきた粒子の堆積が始まり最大濃度 c_a が出現する。したがってこの付近において c_a から c_i に連続的に変化していると考えればこれらの濃度に対応した特性曲線が放射線状に出ることになりこれらの直線と $c = c_a$ の特性直線が交差することになるが、この交点では物質収支から

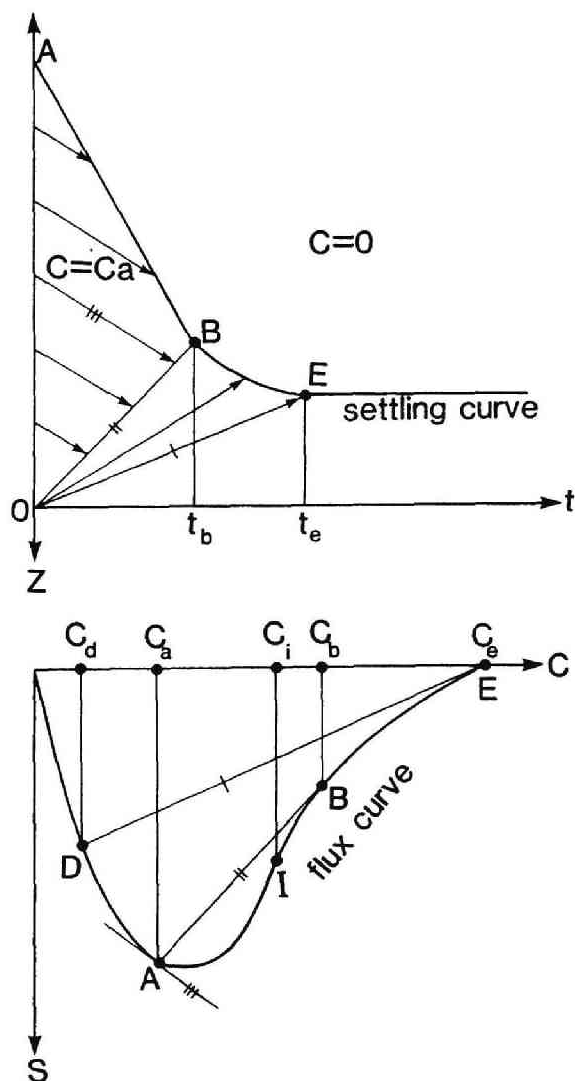


図 2.2.2 Kynch 法説明図

A : 初期濃度点, B : A 点から $S - c$ 曲線への接線

I : 変曲点, E : 沈降停止点, D : E 点での接線と $S - c$ 曲線の交点

$$c_n (u_0^p(c_a) - v) = c_b (u_0^p(c_b) - v) \quad (2.2.23)$$

が成立しなければならない。ここに c_b とはこの交点のすぐ下層の濃度であり v はこの点の移動速度である。したがって

$$v = \frac{S(c_b) - S(c_a)}{c_b - c_a} \quad (2.2.24)$$

なるいわゆる Rankine-Hugoniot 条件⁵⁴⁾を得るが、この c_b が存在するためには交点の軌跡が濃度 c_b の特性曲線と一致する必要がある

$$\frac{dS(c_b)}{dc} = \frac{S(c_b) - S(c_a)}{c_b - c_a} \quad (2.2.25)$$

が要請される。これは線分 AB が B 点にて $S-c$ 曲線の接線となることを意味する。OB より下層では $c_b \sim c_a$ に対応した特性直線が O 点より放射状に出るがこれらの直線はもう 1 つの特性曲線である沈降曲線と交わった時に終結する。以上の説明からわかるように特性曲線の走査状況は $S-c$ 曲線の形状と初期濃度 c_a によって完全に記述され界面の発生状況、筒内の濃度分布の時間的变化も予測可能である。さらに Kynch は単位面積あたりの全固相質量は、原点から出発し沈降曲線に到達する特性曲線を横切らなければならないことに注目し、沈降界面付近の濃度を簡単な図解法から求めることによって、沈降曲線から逆に $S-c$ 曲線を求める方法を提案した。Kynch の提案、及びそれに引き続く Shannon らの検証は、理論の簡潔性及び "ideal slurry" に対する適用性において極めて貢献度が高いものであったが同時に多くの批判も集中した。その主なものを列記すると次のようになる。

- (1) Kynch 法による推定沈降速度値は初期濃度を色々変化させ各々の沈降曲線の定速区間から求めるもの (Coe・Clevenger 法) に比較するとかなり過小になる傾向がある⁵⁵⁾。
- (2) Kynch 法では圧縮効果を考慮せず、したがってこれに伴う現象は予想できない。例えば Kynch 法では特性曲線 (等濃度線) は直進するが実際にはこの近似が成立しない場合も多く特に原点付近ではその誤差が大き

なり，何らかの補正が必要となる^{56) - 59)}

(3)図 2.2.2 の OBに見られるような濃度の不連続点においては運動量の収支関係が不明であり慣性効果，圧縮効果などとの関連が明らかにされなければならない^{60) - 62)}

(4)Kinematic wave 理論によって粒子流の運動解析を行なうにはその物理的な解釈に困難な点が多い^{32), 60) - 62)}

議論のうちのあるものは Kynch 法の現象説明に対する過度の期待から生じたものもあったが，(1)，(2)の点は実用的にも大きな問題点として残った。例えば沈降槽の設計にあたっては，(a)沈殿部において，粒子が実際に下方に移動し濃縮部に離脱できること，(b)濃縮部においては，上方から沈降してくる固体量に対して排泥の取り出し速度が適当であって過剰の堆積があたり取り出しすぎて泥濃度が稀薄とならないこと，が必要である。(b)のためには例えば図2.2.2に見られる濃度不連続面(OB)にこれの移動速度を与えることによって界面自体を固定させればよいが，この速度が圧縮の影響を受けているならば（この場合 $S-c$ 曲線は $\partial c / \partial z$ によって変化し一意的には定まらない）これを Kynch 法によって取り扱うことは不可能となる。すなわち Kynch が仮定したような沈降速度を濃度のみの関係とする取り扱いの実用的にも不十分であり，これらの点をめぐって多くの研究者，例えば Michaels³⁰⁾，Fitch⁶³⁾，Dick⁶⁴⁾，Scott⁶⁵⁾，楠田⁶⁶⁾あるいは Terzaghi の圧密理論の拡張として川島³⁶⁾，Ingersoll³⁷⁾，矢木³⁸⁾，Smiles⁶⁷⁾，Kos^{68) - 70)}及び，栗谷⁴⁰⁾が種々の検討を行なっているもののいまだ定着したものがないのが現状であると言えよう。

2.2.3 沈降圧密方程式に係る 2, 3 の検討

第 2.2.1 節にて導かれた沈降圧密方程式 (2.2.13) は移流拡散型の 2 階偏微分方程式であるが衝撃波が発生することからもわかるように非線型性が強くまた u_0^p ， k ， m_p 等の濃度 c に対する依存性も複雑であるため，解析的な方法によっては解を得ることが困難である。したがって数値解法によってこれを解く必要が生ずるが，ここでは上に述べたような方程式の状況から，2 段階 Lax-Wendroff 系統の方法による差分スキームを使用している。この方法は

Richtmyer⁷¹⁾によって圧縮性流れの計算手法として開発されたものであり、解の不連続性が強い場合に有利な方法とされている。この手法はRubinら⁷²⁾ MacCormack,⁷³⁾ Leratら⁷⁴⁾によって種々の変形が試みられた。これらのスキームを一般的に書き表わせれば次のようになる。

$$\bar{c}_i = (1-\beta) c_{i-1}^j + \beta c_i^j - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z} (S_i^j - S_{i-1}^j), \quad i=1 \sim N-1. \quad (2.2.26)$$

$$c_i^{j+1} = c_i^j - \frac{\Delta t}{2\alpha\Delta z} [(\alpha-\beta) S_{i+1}^j + (2\beta-1) S_i^j + (1-\alpha-\beta) S_{i-1}^j + \bar{S}_{i+1} - \bar{S}_i], \quad i=2 \sim N-1 \quad (2.2.27)$$

ここに i は z に関するサフィックス ($z = (i - 1/2) \Delta z$), j は t に関するサフィックス ($t = (j-1) \Delta t$), 上付きバーは中間時刻での値を示す (図 2.2.3)。また S は z 方向の固相フラックスであり

$$S(c) = (M + u_0^p(c)) c - D_e(c) \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.2.28)$$

と書き表わすことができ、ここでは

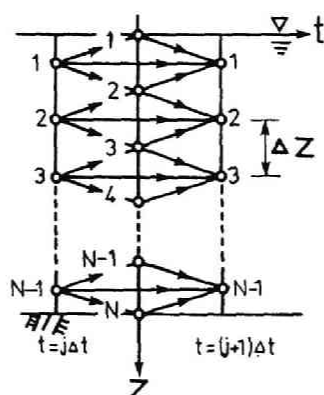


図 2.2.3 差分メッシュの図

$$S_i^j(c) = \{ M + u_0^P(c_i^j) \} c_i^j - \frac{1}{2} D_e(c_i^j) \frac{c_{i+1}^j - c_{i-1}^j}{\Delta z} \quad (2.2.29)$$

$$\bar{S}_i(c) = \{ M + u_0^P(\bar{c}_i) \} \bar{c}_i - D_e(\bar{c}_i) \frac{c_i^j - c_{i-1}^j}{\Delta z} \quad (2.2.30)$$

として計算を行なっている。濃度勾配項の差分表示については他のスキームも考えられるが、境界条件の取り扱い易さから考えて上記のものを採用した。境界条件としては上下端にて固相フラックス，あるいはそれに類似の条件を与えればよいが，これに関連して槽内での全固相質量 T の収支を検討するために式 (2.2.27) を $i = 1 \sim N-1$ について加え合わせると

$$T^{j+1} = T^j - \frac{\Delta t}{2\alpha} \{ \{ (1-\alpha-\beta) S_0^j + (\beta-\alpha) S_1^j - \bar{S}_1 \} + \{ (\alpha+\beta-1) S_{N-1}^j + (\alpha-\beta) S_N^j + \bar{S}_N \} \} \quad (2.2.31)$$

となる。但し T^j とは

$$T^j = \sum_{i=1}^{N-1} c_i^j \Delta z \quad (2.2.32)$$

によって定義される。いまこれを T について成立すべき次式に対応して考える
と

$$\frac{dT}{dt} = S_u - S_b \quad (2.2.33)$$

であるから上端での流入フラックス S_u ，下端での流出フラックス S_b に関し次の対応が考えられる。

$$S_u^j = \frac{1}{2\alpha} \{ \bar{S}_1 - (1-\alpha-\beta) S_0^j - (\beta-\alpha) S_1^j \} \quad (2.2.34)$$

表 2.2.2 沈降圧密式の差分スキーム

		c_i or \bar{c}_i	S_i or \bar{S}_i
Predictor	$i=1$	$\bar{c}_1 = c_1^j - \alpha \Delta t / \Delta x \bar{S}_1$	$\bar{S}_1 = u_0^p(c_1^j)c_1^j - \frac{k_1^j c_1^j}{\rho^j q a_1^j \Delta x} (c_2^j - c_1^j)$
	$i=2 \sim N-2$	$\bar{c}_i = (1-\beta)c_{i-1}^j + \beta c_{i-2}^j - \alpha \Delta t / \Delta x (\bar{S}_i - \bar{S}_{i-1})$	$\bar{S}_i = u_0^p(c_i^j)c_i^j - \frac{k_i^j c_i^j}{2 \rho^j q a_i^j \Delta x} (c_{i+1}^j - c_{i-1}^j)$
	$i=N-1$	$\bar{c}_{N-1} = (1-\beta)c_{N-2}^j + \beta c_{N-1}^j - \alpha \Delta t / \Delta x (\bar{S}_{N-1} - \bar{S}_{N-2})$	$\bar{S}_{N-1} = u_0^p(c_{N-1}^j)c_{N-1}^j - \frac{k_{N-1}^j c_{N-1}^j}{\rho^j q a_{N-1}^j \Delta x} (c_{N-1}^j - c_{N-2}^j)$
	$i=N$	$\bar{c}_N = c_{N-1}^j + \alpha \Delta t / \Delta x \bar{S}_{N-1}$	
Corrector	$i=1$	$c_1^{j+1} = c_1^j - \Delta t / 2 \alpha \Delta x [(\alpha - \beta) S_2^j + (\beta - \alpha - 1) S_u^j + \bar{S}_2]$	$S_i = S_u$
	$i=2 \sim N-2$	$c_i^{j+1} = c_i^j - \Delta t / 2 \alpha \Delta x [(\alpha - \beta) S_{i+1}^j + (2\beta - 1) S_i^j + (1 - \alpha - \beta) S_{i-1}^j + \bar{S}_i]$	$S_i = \bar{S}_i$ $S_i = u_0^p(\bar{c}_i)\bar{c}_i - \frac{\bar{k}_i \bar{c}_i}{\rho^j q \bar{a}_i \Delta x} (c_i^j - c_{i-1}^j)$
	$i=N-1$	$c_{N-1}^{j+1} = c_{N-1}^j - \Delta t / 2 \alpha \Delta x [(\alpha - \beta) S_b^j + (1 - \alpha - \beta) S_{N-2}^j - \bar{S}_{N-1}]$	$S_{N-1} = S_b$ $\bar{S}_{N-1} = u_0^p(\bar{c}_{N-1})\bar{c}_{N-1} - \frac{\bar{k}_{N-1} \bar{c}_{N-1}}{\rho^j q \bar{a}_{N-1} \Delta x} (c_{N-1}^j - c_{N-2}^j)$

$$S_b^j = \frac{1}{2\alpha} \{ \bar{S}_N + (\alpha + \beta - 1) S_{N-1}^j + (\alpha - \beta) S_N^j \} \quad (2.2.35)$$

したがって、計算上の上下端フラックス S_0, S_1, S_{N-1}, S_N に関しては式 (2.2.34), (2.2.35) の関係を満たす範囲で定めればよいが、仮に

$$\bar{S}_1 = S_0^j = S_1^j = S_u^{'j}, \quad \bar{S}_N = S_{N-1}^j = S_N^j = S_b^{'j} \quad (2.2.36)$$

とすれば $S_u^{'j}, S_b^{'j}$ はそれぞれ S_u^j, S_b^j と一致しなければならない。以上の検討をまとめ表示すると表 2.2.2 のようになる。なおこの時の M は 0 としている。ここに示したスキームが質量保存則を満たすことは上の導出からも明らかである。スキームに関する重みである α, β に関しては表 2.2.3 のようにさまざまなものが提案されているがその有利性は非線型の程度、境界条件の種類等に依存する。但し、境界条件による影響を除いたスキーム自体の散逸性、分散性は、擬似微分方程式を検討することによってもある程度推測可能であり以下これに関する検討を若干行なう。

表 2.2.3 表 2.2.2 の α, β

		α	β
Richtmyer	(1962) ⁷¹⁾	0.5	0.5
Rubin et al.	(1967) ⁷²⁾	1.0	0.5
Mac Cormack	(1969) ⁷³⁾	1.0	0 or 1
Warming et al.	(1973) ⁷⁵⁾	α	0 or 1
McGuire et al.	(1973) ⁷⁶⁾	α	0.5
Lerat et al.	(1975) ⁷⁴⁾	2.118	0.5

差分スキームの擬似微分方程式⁷⁷⁾とは差分形から Taylor 展開を使用して逆にその形に対応するように導かれた微分方程式であり、その挙動を調べることによってもとの差分形式の性質を推測することができる。式 (2.2.26),

(2.2.27) に関する2次擬似微分方程式は拡散項がない場合, Lerat ら⁷⁸⁾によって次式のように導出されている

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{(\Delta z)^2}{6} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\Delta^2 A^2 - 1) \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{3}{2\alpha} \cdot \frac{dA}{dc} \cdot \right. \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z} (\beta c - \alpha \Delta S) \frac{\partial}{\partial z} [(\beta - 1)c - \alpha \Delta S] + 2\Delta^2 \frac{dA}{dc} \cdot \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

ここに $\Delta = \Delta t / \Delta z$, $A = \partial S / \partial c$ である。上式右辺は z に関する各階数の微分項の和に展開されるが、それらのうち特に2階の項は散逸効果に、3階の項は分散効果に対し大きく寄与する。式(2.2.37)から2階微分 $\partial^2 c / \partial z^2$ に係る係数 D_n は、

$$D_n = \frac{(\Delta z)^2}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \bar{D}_n \quad (2.2.38)$$

但し \bar{D}_n は

$$\bar{D}_n = \Delta^2 A^2 (3 - \alpha) + \frac{\beta(1 - \beta)}{\alpha} + \Delta A (2\beta - 1) - 1 \quad (2.2.39)$$

となる。 D_n は数値拡散係数であり計算の安定性、精度の点からはこれが正でありかつその大きさが小さい方が望ましい。 D_n 中の $\partial A / \partial z$ は

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{dA}{dc} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{d^2 S}{dc^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.2.40)$$

であるから $S - c$ 曲線が "convex" (変曲点がなく上に凸) であれば $d^2 S / dc^2$ は常に負であり沈降圧縮のように $\partial c / \partial z \geq 0$ が予想される場では両者の積は負となる。したがって D_n が正となるためには \bar{D}_n が負でなければならない。さらに Courant-Friedrichs-Lewy の収束条件下での $|\Delta A| \leq 1$ が必要で

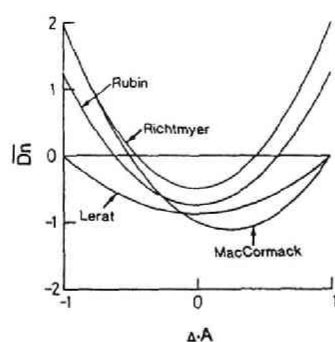
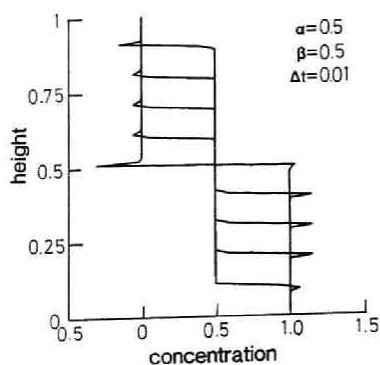


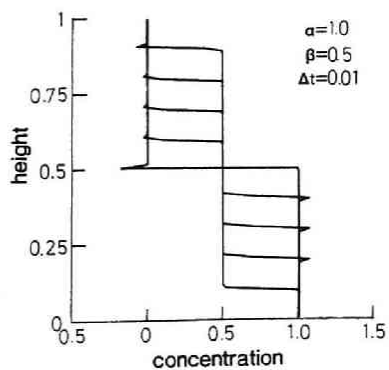
図 2.2.4 各スキームの数値散逸に関する係数 \bar{D}_n の挙動

表 2.2.4 K ynch 式の差分計算一覧

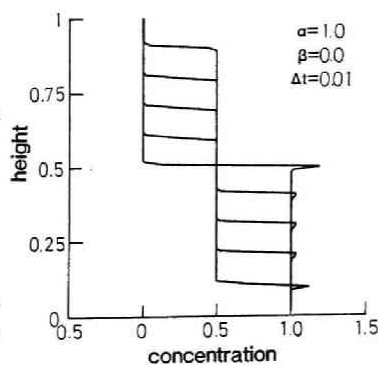
使用フラックス	図番号	c_a	d	β	Δt
$S = c(1 - c)$ (S_1)	図 2.2.5 (a)	0.5	0.5	0.5	0.01
	(b)	0.5	1.0	0.5	0.01
	(c)	0.5	1.0	0.0	0.01
	(d)	0.5	2.118	0.5	0.01
	(e)	0.25	2.118	0.5	0.01
	(f)	0.75	2.118	0.5	0.01
$S = c(1 - c)(1 - rc)$ $r = \frac{1}{1 + 3c_{\text{inf}}}$ $c_{\text{inf}} = 0.68$ (S_2)	図 2.2.6 (a)	0.65	0.5	0.5	0.005
	(b)	0.65	1.0	0.5	0.01
	(c)	0.65	1.0	1.0	0.01
	(d)	0.65	2.118	0.5	0.01
	(e)	0.65	2.118	0.5	0.005
	(f)	0.65	5.0	0.5	0.01
	(g)	0.4	2.118	0.5	0.01
	(h)	0.55	2.118	0.5	0.01



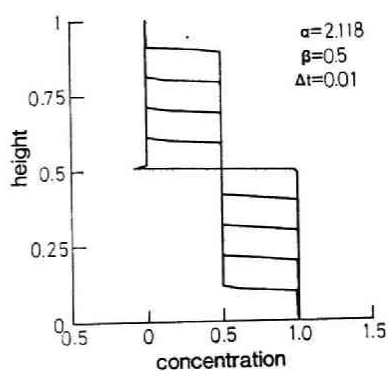
(a)



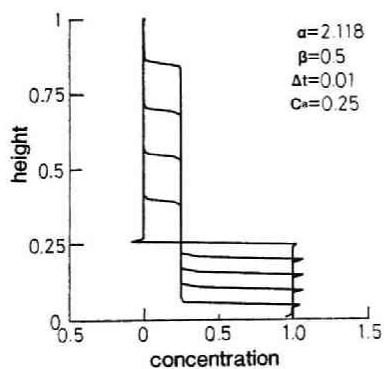
(b)



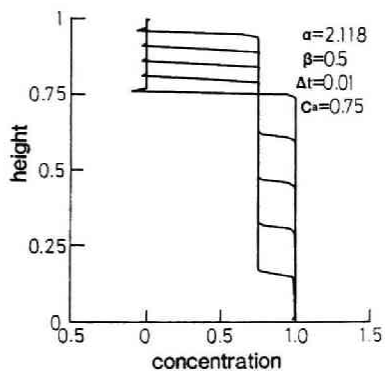
(c)



(d)

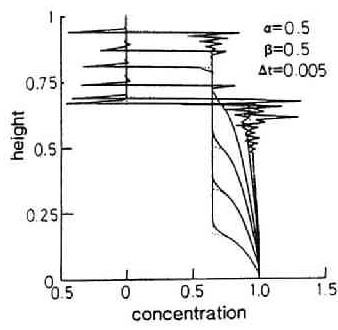


(e)

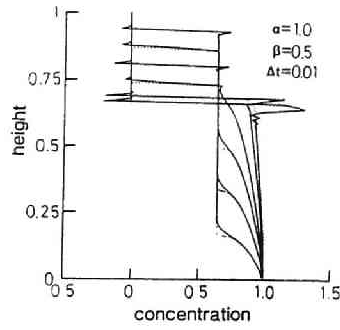


(f)

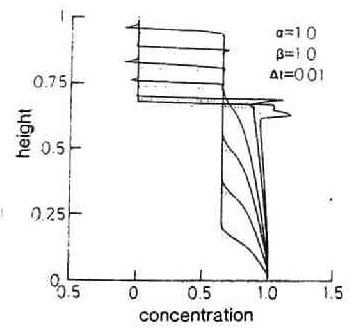
図 2.2.5 Kynch 式の差分計算, $S_1(c)$ の場合
 $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ を示している
 $\alpha, \beta, \Delta t$ については表 2.2.4 に記す。



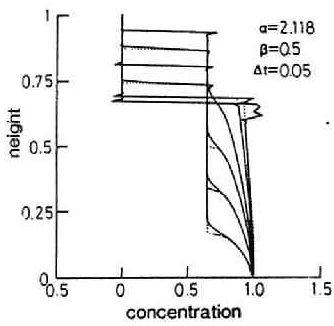
(a)



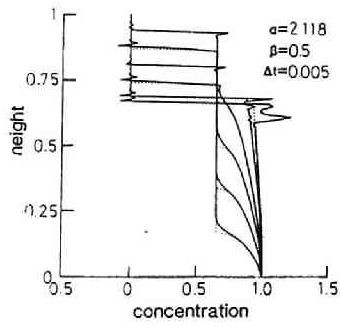
(b)



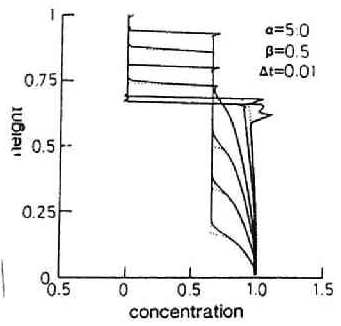
(c)



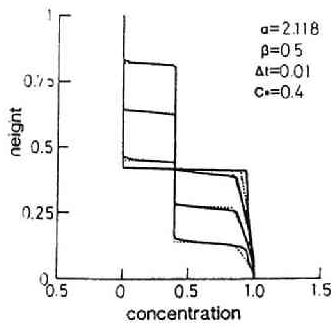
(d)



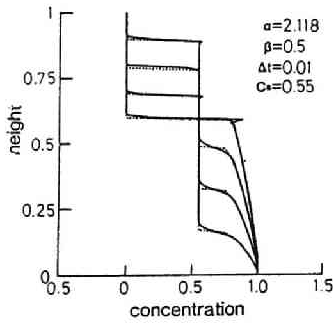
(e)



(f)



(g)



(h)

図 2.2.6 Kynch 式の差分計算, $S_2(c)$ の場合
 $t = 0.5, 1.0, 1.5, 2, 3, 4$ を示している
 但し, (g), (h) は $t = 1, 2, 3, 4$ である。
 点線は特性曲線法による解析解

あるからこの条件下での \bar{D}_n の挙動を示すと図 2.2.4 のようになる。図から \bar{D}_n が常に負となるものは Lerat のスキームでありその大きさもそれ程大きくない。しかし $S-c$ 曲線が “concave” (変曲点が 1 ケ所以上存在) の場合には d^2S/dc^2 の符号は必ずしも負ではなく \bar{D}_n に関する一定した指針はなくなる。

上記の考察を実験的に検討したものが図 2.2.5, 6 (表 2.2.4) である。使用した固相フラックス $S(c)$ は次式で表わされる convex 及び singly concave なものであり図 2.2.7 に示されている。

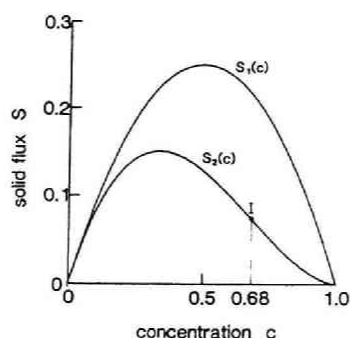


図 2.2.7 計算に使用した $S-c$ 曲線
 $S_2(c)$ は I にて変曲点をもつ

$$S_1(c) = c(1-c) \quad (2.2.41)$$

$$S_2(c) = c(1-c) \cdot (1-rc) \quad (2.2.42)$$

ここに r は定数であり変曲点濃度 c_{inf} とは

$$c_{inf} = \frac{1-r}{3r} \quad (2.2.43)$$

の関係をもつ。 $0 < c < 1$ にて $S_2(c)$ が正になるためには $0.5 \leq r \leq 1$ でなければならない。図 2.2.5(a)~2.2.5(f) は $S_1(c)$ の場合の各スキームを用いた計算結果であり、初期水深 1, $\Delta z = 0.01$, $N = 101$ 及び $\Delta t = 0.01$ として

計算したものである。 $S_1(c)$ のように $S-c$ 曲線が convex の場合は Kynch が Type-1 と称したものであり、初期濃度を c_a とすると沈降曲線は $S(c_a)/c_a = (1-c_a)$ の速度で下降し、沈積線は $S(c_a)/(1-c_a) = c_a$ の速度で上昇するから $t=1$ にて両線が交差した時に沈降が終了する。この時、観測される濃度は上澄み部の $c=0$ 、初期濃度部の $c=c_a$ 、沈積部の $c=1$ のみであり、他の濃度は発生しない。図 2.2.5 の計算例ではいずれの場合も濃度急変部にて若干の振動が見られるが、その程度は Lerat スキームにおいてもっとも小さい。いっぽう $S_2(c)$ の場合には初期濃度によって沈降状況が異なる。図 2.2.2 のように $c_d < c_a < c_i$ のときには筒内濃度分布は上層の上澄み部 ($c=0$)、初期濃度部 ($c=c_a$)、線分 OB にそって伝播する衝撃波、その下層の濃度漸変部、最下層の沈積部に分割される。図 2.2.6(c),(d) はこれを McGuire 及び Lerat スキームによって解いたものであり、点線は特性曲線法によって求めた解析解である。他のスキームによっても状況はほぼ同様であるが濃度急変部における振動はより大きなものもあった。 Δt の影響については Lerat スキームについてのみそれを $1/2$ にした時の影響を図 2.2.6(e) に示すが、他のスキームにおいても Δt の減少は振動を増大する効果を示した。また図 2.2.6 にて使用した $\Delta t = 0.01$ は計算が収束するにはほぼ最大の Δt であり例えば $\Delta t = 0.011$ にては計算は発散した。図 2.2.5、2.2.6 を概観すると $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 0.5$ (Richtmyer スキーム) 以外はほぼ同様な結果を示し $\alpha = 2.118$ (Lerat スキーム) あるいはそれ以上の α 値において比較的良好な成績を得ている。

以上の結果はいずれも圧縮項を無視した場合の検討であったが圧縮項の追加が計算の精度、安定性にどのような影響を及ぼすかは明らかではない。但し数値計算上、大きな問題となる衝撃波付近においては圧縮項の追加は過度な振動を減衰させ、安定性を増加させるであろうから、上記のスキームによってほぼ妥当な解が得られることが推測されるが、正確な議論については今後の研究にまつ必要がある。

さて、今まで述べてきたように沈降圧密基礎式 (2.2.13) の非定常的な解析にあたっては数値計算が中心となるが、沈降終了時、あるいは定常解析が可能である場合には解析的に取り扱うことも考えられる。

例えば、沈降実験終了時においては、

$$\frac{dU_e c}{dz} = \frac{d}{dz} D_e \frac{dc}{dz} \quad (2.2.44)$$

が成立するが，端からの流出入固相フラックスが0であることから

$$\frac{dc}{dz} = \frac{U_e}{D_e} c = a \left(1 - \frac{\rho^b}{\rho^p}\right) q c \quad (2.2.45)$$

が成立する。この解は $z = z_0$ の時 $c = c_0$ として

$$z = z_0 + \int_{c_0}^c \frac{dc}{a \left(1 - \frac{\rho^b}{\rho^p}\right) q c} \quad (2.2.46)$$

となるが a の具体的な関数型として後に示す実験結果から

$$a = \frac{dc}{d\sigma} = \lambda c \left(\frac{c}{a_1}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (\lambda \leq 1) \quad (2.2.47)$$

を仮定すれば，

$$c - c_0 = a_1^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{ (1-\lambda) \left(1 - \frac{\rho^b}{\rho^p}\right) q (z - z_0) \right\}^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (2.2.48)$$

を得る。ここに a_1, λ は沈降物質に固有な定数であり，有効応力が発生する最小濃度 c_{\min} は近似的に0と仮定している。いま z_0 を泥界面とし，ここにて近似的に $c_0 = 0$ とすれば

$$c(z') = a_1^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{ (1-\lambda) \left(1 - \frac{\rho^b}{\rho^p}\right) q z' \right\}^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (2.2.49)$$

を得る。ここに z' とは沈降界面からの深さである。さらに沈降実験の初期濃度，初期水深をそれぞれ c_a, H_0 ，また最終沈降高さを H_∞ とすれば，

$$\int_0^{H_\infty} c(z') dz' = c_a H_0 \quad (2.2.50)$$

であるからこれに式 (2.2.49) を代入すると

$$H_{\infty} = \frac{(c_a H_0)^{1-\lambda}}{(1-\lambda) a_1 \left\{ q \left(1 - \frac{\rho^{\ell}}{\rho^p} \right) \right\}^{\lambda}} \quad (2.2.51)$$

となり c_a を一定にしても H_{∞} は H_0 と比例することはない。

沈降圧縮現象における沈降と圧密効果の相対的な重要性は式 (2.2.13) における沈降項と圧縮項の比である次式のペクレ数 P_e によって表わすことができる。

$$P_e = \frac{u_0^p c}{\left| D_e \frac{\partial c}{\partial z} \right|} = \frac{a \left(1 - \frac{\rho^{\ell}}{\rho^p} \right) q c}{\left| \frac{\partial c}{\partial z} \right|} \quad (2.2.52)$$

槽内の濃度分布 $c(z', t)$ として最終状態である式 (2.2.49) 及び式 (2.2.13) の数値解である図 2.2.8 などを参考にしてこれと相似である

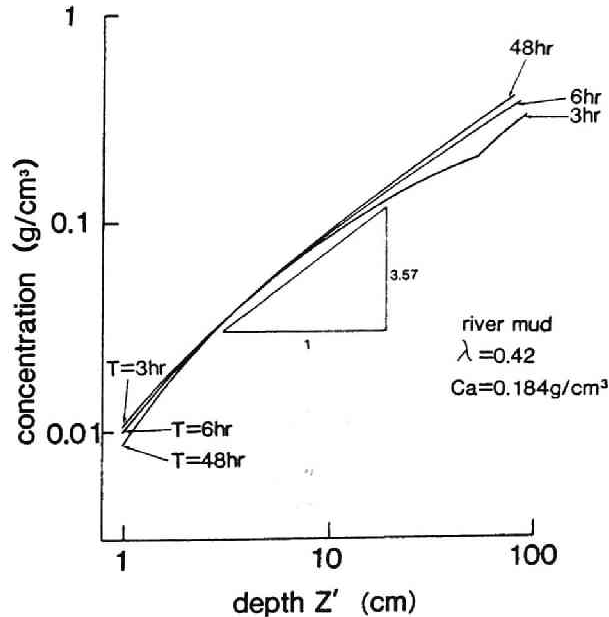


図 2.2.8 濃度分布の例 (数値シミュレーション)
沈降開始後 3, 6, 48 時間

$$c(z', t) = c_1(t) \left(\frac{z'}{H(t)} \right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \quad (2.2.53)$$

によって近似してみる。ここに $H(t)$ とは界面高であり、 $c_1(t)$ は $z' = H(t)$ すなわち槽底における濃度である。 $H(t)$ 、 $c_1(t)$ は独立には決め得ず、槽内濁質量が時刻によらず一定である条件から

$$c_1(t) H(t) = \frac{c_a H_0}{1-\lambda} \quad (2.2.54)$$

を満たさなければならない。式 (2.2.47)、(2.2.51) 及び (2.2.53) を使用すれば P_e は

$$P_e = (1-\lambda)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \left(\frac{c_a H_0}{c H_\infty} \right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left(\frac{z'}{H_\infty} \right) \quad (2.2.55)$$

となるが、例えば界面高変化に及ぼす沈降・圧縮の効果を検討するために、 z に $H(t)$ を、 c に $c_1(t)$ を代入してみると

$$P_e = \left(\frac{H(t)}{H_\infty} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (2.2.56)$$

を得る。 $H(t)$ の変化から $S-c$ 曲線を推定する操作は Kynch 法の骨子であるが、この操作が意味をもつためには $P_e \gg 1$ が必要ありその程度は H_∞ 、 λ を知ることによって推定ができることになる。

回分沈降試験における沈降終期の濃度分布が式 (2.2.53) によって近似し得るとすれば、これは式 (2.2.13) を平均的に満足する必要がある。その基準を z に関する q 次モーメントとし

$$\int_0^H z'^q \frac{\partial c}{\partial t} dz' + \int_0^H z'^q \frac{\partial u_0^p c}{\partial z'} dz' = \int_0^H z'^q \frac{\partial}{\partial z'} D_e \frac{\partial c}{\partial z'} dz' \quad (2.2.57)$$

を満たすように $H(t)$ を定めれば、これは

$$\frac{dH}{dt} + A_2 H^{-m+1} = A_1 H^{-m+1-\frac{1}{\lambda}} \quad (2.2.58)$$

の解として求めることができる。ここに m とは沈降のみによる固相フラックス S_0 の c に対する感度 ($S_0 = u_0^p c = u_1 c^m$) であり, A_1, A_2 は

$$A_1 = - \frac{\lambda m u_1 \left(q + \frac{\lambda}{1-\lambda} + 1 \right)}{\{ \lambda m + q(1-\lambda) \} \left(1 - \frac{\rho^{\frac{1}{p}}}{\rho^{\frac{1}{p}}} \right) q a_1^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\frac{c_a H_0}{1-\lambda} \right)^{m + \frac{1-\lambda}{\lambda} - 1} \quad (2.2.59)$$

$$A_2 = - \frac{\lambda m u_1 \left(q + \frac{\lambda}{1-\lambda} + 1 \right)}{\lambda m + q(1-\lambda)} \left(\frac{c_a H_0}{1-\lambda} \right)^{m-1} \quad (2.2.60)$$

によって定義される。但し式 (2.2.58) の導出にあたっては

$$m < 0, \quad q > \frac{-\lambda m}{1-\lambda} \quad (2.2.61)$$

を仮定している。式 (2.2.58) にて $t \rightarrow \infty$ では

$$H = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\lambda} = H_{\infty} \quad (2.2.62)$$

となり式 (2.2.51) と一致するが, その近傍では $H = H_{\infty}$ にて線形近似を行い次の Roberts 型の式を得る。

$$\frac{dH}{dt} + k_R (H - H_{\infty}) = 0 \quad (2.2.63)$$

ここに k_R は Roberts 定数と称されるものであり, 式 (2.2.58) からは

$$k_R = \frac{A_1}{\lambda H_{\infty}^{m+\frac{1}{\lambda}}}$$

$$= - \frac{m \left\{ q \left(1 - \frac{\rho^l}{\rho} \right) \right\}^{m\lambda} a_1^m (1-\lambda)^2 u_1 \left(q + \frac{\lambda}{1-\lambda} + 1 \right) (H_0 c_a)^{-1+m\lambda}}{\lambda m + q (1-\lambda)} \quad (2.2.64)$$

でなければならない。Roberts 定数に関しては従来からしばしば検討対象となり、Roberts⁷⁹⁾はこれが一定値であることを主張したが吉岡ら⁸⁰⁾はほぼ $H_0 c_a$ に反比例することを実験的に示し、矢木ら³⁸⁾、Behnら⁸¹⁾、穂積⁸²⁾は Terzaghi の一次元圧密式級数解の初項から H_0 に反比例すべきことを示しているが、式 (2.2.64) からは $H_0 c_a$ の $1-m\lambda$ 乗に反比例することになる。 m 値としては Dickら^{83),84)}、Duncunら⁸⁵⁾、あるいは吉岡ら⁸⁰⁾のデータからは $-1 \sim -2$ 程度であるが、圧密が卓越する高濃度領域にては集塊構造が変化することによってより 0 に近い値となるようである。また後述するように λ 値は 0.5 程度であるから結局 $1-m\lambda$ は 1 程度と考えられ、吉岡ら⁸⁰⁾あるいは矢木ら³⁸⁾の観測と矛盾しない。これは Toryら⁵⁸⁾が行なった CaCO_3 の沈降実験による k_R の測定結果からも傍証される。すなわち Toryら⁵⁸⁾は式 (2.2.63) に関連する Deerr, Roberts, 吉岡らの実験結果から圧密沈降時の沈降基礎式として

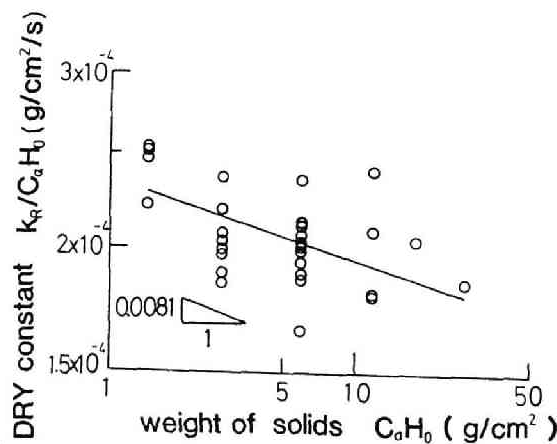
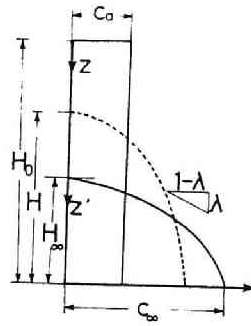


図 2.2.9 DRY 定数と固相量の関係
Toryら⁵⁸⁾の実験データによる。炭酸カルシウム。
決定係数 0.321。



$$H_\infty \propto (C_0 H_0)^{1-\lambda}$$

$$C_\infty \propto (C_0 H_0)^\lambda$$

$$\frac{dH}{dt} \propto \frac{-(H-H_\infty)}{(C_0 H_0)^{1-\lambda}}$$

図 2.2.10 沈降終了時の濃度分布（模式図）

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{k_{DRY}}{H_0 c_a} (H - H_\infty) \quad (2.2.65)$$

を提案しこれを DRY 方程式と名付け、 k_{DRY} (DRY 定数) を泥質に固有な定数と仮定したが、彼らが根拠とした DRY 定数の実験結果と $H_0 c_a$ の関係を再検討してみると、図 2.2.9 のように $H_0 c_a$ の増加に伴って k_{DRY} が減少していることがわかる。つまり、Roberts 係数 k_R はおよそ $c_a H_0$ の -1 乗に比例するものの実際にはそれよりも小さな値となることがわかる。

以上、沈降圧密方程式 (2.2.13) に関連し本節では次の諸点を明らかにした。

(1) 式 (2.2.13) の数値解析を差分法によって行うには 2 段階 Lax ・

Wendroff スキームのうち α が大きいもの、例えば Lerat スキーム等が適当である。

(2) 沈降圧密終了期における濃度分布は式 (2.2.49) によって表わされ、その沈降高さは式 (2.2.51) によって示される。

(3) 沈降及び圧縮の相対的重要性は P_0 によって示され、特に沈降末期における界面低下速度に対しては、沈降終了高 H_∞ 及び有効応力発生に係るパラメータ λ が重要な指標となる。

(4) Roberts 係数 k_R は単位面積当りの固相量 $c_a H_0$ の $-1+m\lambda$ 乗に比例する。

(2)及び(4)を模式的に取りまとめたものを図 2.2.10 に示す。

2.2.4 室内実験

本節では今まで述べてきた諸点を検証するために行った沈降圧密実験について説明する。実験に使用した沈降筒は図 2.2.11 に示すような内径 30 cm, 全長 120 cm の透明アクリル樹脂製の円筒であり, 上部には攪拌用のモータが付属している。また使用した粒子状物質は湖底泥 (琵琶湖南湖にて採取), 河川底泥 (京都市内桂川にて採取), 及びカオリンであり, 分散・凝集操作等はない。表 2.2.5 にこれらの泥特性を一覧する。実験は次の手順によって行った。

(1) 十分, 水に馴じませた一定量の泥質及び水道水を水深 100 cm になるように筒内に注入する。

(2) 攪拌プロペラによって十分攪拌する。その条件は 100 rpm, 30 分とする。

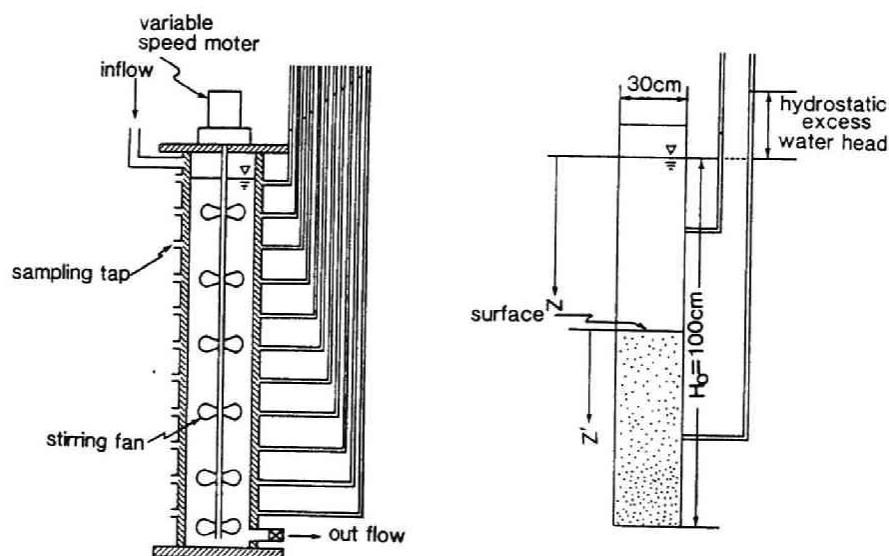


図 2.2.11 実験装置

表 2.2.5 本実験で使⽤した泥質の特性

	密 度 g/cm^3	10%径 μm	50%径 μm	強熱減量 %	pH
湖底泥 1	2.45	7.4	17.8	15.9	6.94
湖底泥 2	2.40	10.3	20.5	10.8	7.42
河川泥 1	2.38	8.5	19.3	8.4	7.31
河川泥 2	2.42	9.6	25.3	7.9	7.24
カオリン	2.58	0.8	3.8	0.90	6.99

(3)攪拌の停止を時刻 0 とし、以後、界面高、泥濃度、過剰間隙水頭を定期的に計測する。

(4)過剰間隙水頭がほぼ 0 になるまで(3)を継続する。

前節までに述べてきた沈降圧密機構では(1)一様場における沈降速度 u_0^P 、及び(2)有効応力 σ に関する構成関係をあらかじめ与える必要がある。

沈降速度 u_0^P に関しては、初期濃度を何段階か変化させ、その時の界面沈降速度を等速度区間から推定し用いている。この場合 Kynch 法が使用し得ないことは言うまでもない。さらに等速度区間での沈降速度は式 (2.2.10) の u_0^P に直接に対応するわけでもない。これは次の事情による。本研究で採用した有効応力 σ と濃度 c の関係である式 (2.2.47) あるいは後述する表 2.2.7 に示す関係はいずれも処女圧縮曲線に相当するものであり、実際に出現している応力を必ずしも表わさない。すなわち、図 2.2.12 において初期濃度 c_a の泥質に対して載荷圧 σ_a を何らかの方法で減少させた場合の $\sigma - c$ の軌跡は AB ではなくより大きな勾配をもつ AE、あるいは ADF となるであろう。そこで、もっとも簡単な場合として AD が c 軸に対し垂直である場合を想定してみると濃度 c_a に対し発生する有効応力は 0 から σ_a 間の任意の値を取り得ることになる。考察を回分沈降実験開始時に限定し、槽内の濃度分布を $c = c_a$ の一様な分布と仮定すれば、その時の沈降速度 u^P は式 (2.2.11) と同様にして

$$u^P(c_a) = u_0^P(c_a) - \frac{e^2}{F} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \Big|_{c=c_a} \quad (2.2.66)$$

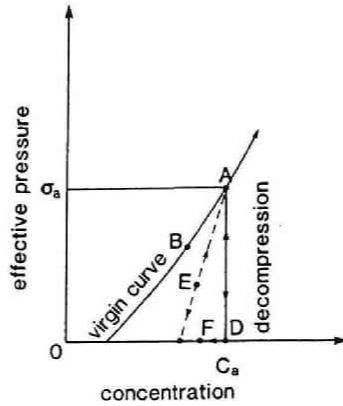


図 2.2.12 圧縮曲線（模式図）

であるが上記の考察から $\partial\sigma/\partial z|_{c=c_a}$ は必ずしも 0 ではなく、したがってその時に得られる沈降速度 $u^P(c_a)$ は $u_0^P(c_a)$ と一致しない。そこで $\partial\sigma/\partial z|_{c=c_a}$ に関する仮定として、(1)槽底部を除いて沈降速度 u^P は一定であり、(2)槽底部 $z=H_0$ 付近にては塑性変形が発生し $\sigma-c$ の関係は処女圧縮曲線上にある、と考えれば式 (2.2.66) は

$$u^P(c_a) = u_0^P(c_a) \left(1 - \frac{H_a(c_a)}{H_0} \right) \quad (2.2.67)$$

となる。ここに $H_a(c_a)$ とは一様濃度 c_a の泥質が水中にて塑性変形なしに自立できる最高高さであり、

$$H_a(c_a) = \frac{\sigma(c_a)}{c_a \left(1 - \frac{\rho^l}{\rho^p} \right) g} \quad (2.2.68)$$

によって表わされる。式 (2.2.67) は Michaels³⁰⁾ が沈降速度に及ぼす初期高さ H_0 の影響を評価するために導出したものとほぼ一致する。本実験における H_a は後述する有効応力測定データからは $c_a = 0.15 \text{ g/cm}^3$ にて最大 40 cm 程度にもなり、 $H_0 = 100 \text{ cm}$ 程度の実験では無視できない大きさになる。したがって本実験においては初期高 H_0 を変化させ (40 ~ 100 cm), その時の $u^P -$

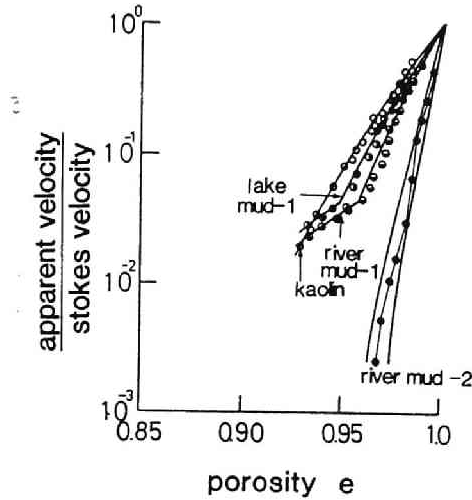


図 2.2.13 沈降速度 u_0^P の観測値

$1/H_0$ のプロットから $1/H_0 \rightarrow 0$ 時の u^P を外挿する方法 (Coe・Clevenger + Michaels・Bolger 法) によって測定値の補正を行った。図 2.2.13 はそれらの結果得られた u_0^P を真密度 ρ^P から算出した間隙率 e との関係で示したものであるが、これからわかるように u_0^P は e の範囲によって 2 段階の挙動を示す。これは粒子が集塊をなすために (1) 稀薄濃度時にはこれら集塊間の流れ (interfloc flow) が、(2) 濃厚時には集塊内での流れ (intrafloc flow) が抗力を決定する主因となるためと考えられ、Gaudin ら⁸⁶⁾、Michaels ら³⁰⁾ あるいは Scott⁸⁷⁾ も同様の観測結果あるいは考察を行なっている。さらに Gaudin ら⁸⁶⁾ 及び Scott⁸⁷⁾ はこうした沈降特性をモデル化するにあたってそれぞれの領域において別々のポアズイユ流れモデル、Carman 抵抗則モデル等をあてはめる 2 段階モデルを提案しているが、彼らが採用したポアズイユモデル、あるいは Carman モデルは実験値との適合性が良くないこと、あるいは $e \rightarrow 0$ にて有限値となり得ないことなどの欠点をもち採用し難い。したがって他の沈降関数型を使用する方が望ましいが、例えば比較的良く利用されている Richardson・Zaki⁸⁸⁾、あるいは Steiner⁸⁹⁾ のそれを検討してみると図 2.2.14 のようになる。(なお図中には Carman・Kozeney モデル、あるいは Gaudin ら⁸⁶⁾ によるポアズイユモデルも合わせて記す。) すなわち、いざ

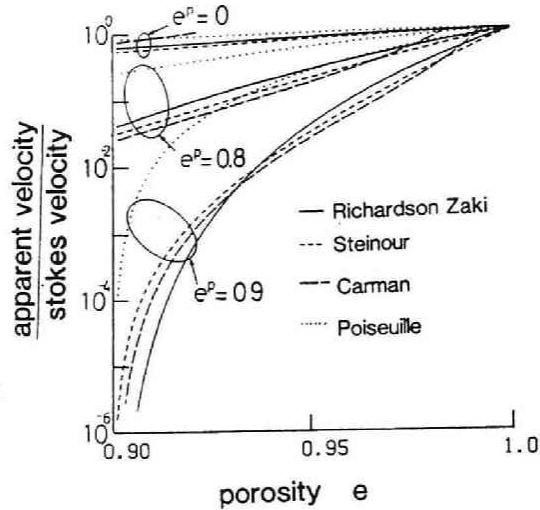


図 2.2.14 沈降関数の比較

e^p は粒子（集塊）の空隙率を示す。

Poiseuille モデルを除きほぼ同様の挙動を示す。但し

Carman モデルは $e = 1.0$ のとき ∞ となる。

れのモデルによってもほぼ同様な挙動を示すから，ここでは仮に Steiner のそれを採用しこれによる実験値の適合を試みた。Steiner 沈降関数式は次式によって表わされる。

$$u_0^p = u_s \left(\frac{e - e^p}{1 - e^p} \right)^2 10^{-1.82 \left(\frac{1 - e}{1 - e^p} \right)} \quad (2.2.69)$$

ここに u_s とは $e = 1.0$ の時の沈降速度（ストークス速度）， e^p とは集塊の空隙率に対応するパラメータである。図 2.2.13 に示された実線は上記のモデルをそれぞれの領域にあてはめることによって得られたものであり比較的良好な一致を示す。表 2.2.6 はあてはめに使用したパラメータであるが，これらのうち，特に稀薄領域時における集塊体積／集塊内の固相体積である $1/(1 - e_1^p)$ と両領域の境界体積濃度 $1 - e_c$ の関係をプロットしたものを図 2.2.15 に示す。

図中には Gaudin ら⁸⁶⁾，Michaels ら³⁰⁾，Kos⁷⁰⁾ あるいは Shin ら⁹⁰⁾ のデータによる点も合わせ記しているが，これから稀薄濃度領域にて生成される集塊の空隙率 e_1 が高いほど境界体積濃度 $1 - e_c$ が低いことが推定されよう。

表 2.2.6 沈降関数のパラメータ

	集塊体積 固相体積 (領域 1) $\frac{1}{1 - e_1^p}$	境界含土率 $1 - e_c$	集塊体積 固相体積 (領域 2) $\frac{1}{1 - e_2^p}$
湖底泥 1	9	0.055	2.3
河川泥 1	11	0.042	2.0
河川泥 2	20 ~ 30	—	—
カオリン	8	—	—

e_1^p : 領域 1 における集塊の空隙率

e_2^p : 領域 2 における集塊の空隙率

e_c : 領域 1, 2 の境界空隙率 (液相体積 / 全体積)

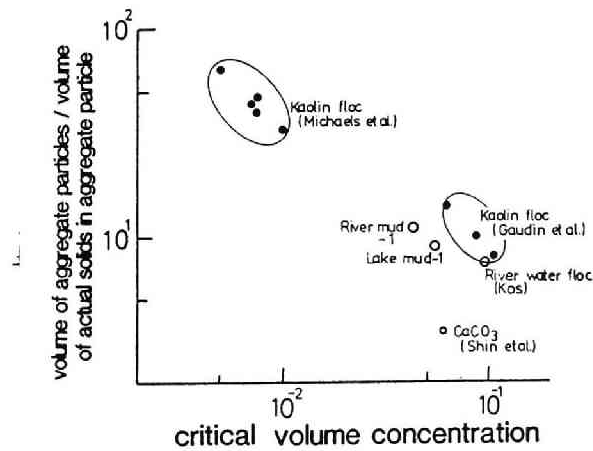


図 2.2.15 境界体積濃度と集塊の膨潤率

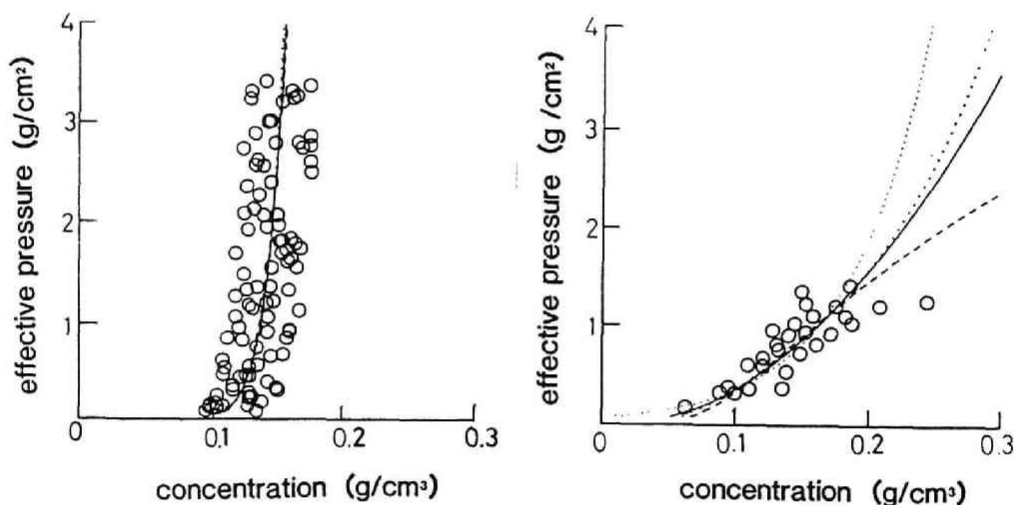
いっぽう有効応力 σ の測定は濃度分布 $c(z)$, 過剰間隙水頭 $h_h(z)$ から

$$\sigma(z) = g \left(1 - \frac{\rho^l}{\rho^p} \right) \int_0^z c(z) dz - h_h(z) \rho^l g \quad (2.2.70)$$

を用いて行った。これは式 (2.2.7) 及び過剰間隙水頭 $h_h(z)$ の定義式である

$$h_h(z) = \frac{P(z)}{\rho \cdot g} - z \quad (2.2.71)$$

を用い導出されるものであり、Shinら⁹¹⁾あるいはKos⁷⁰⁾も同様な方法を用いた計測を行なっている。図 2.2.16(a)~(e)はこの方法で求めた σ と 場合における濁質濃度 c との関係を示したものであり、ばらつきは大きいものの c の増加に伴って σ は急速に増加していることがわかる。 σ と c 、あるいは間隙率 e の関係については従来より種々の関数型が提案されており、例えば粘性土の体積変化に関する従来の考え方では間隙比 w と $\log \sigma$ の間に線型の関係が予想されるが、はたして沈降・自重圧密のようなきわめて微小な応力下において



(a) 湖底泥1 $a_1^* = 0.060$, $\lambda = 0.193$,

(b) 湖底泥2 $a_1^* = 0.153$, $\lambda = 0.508$,

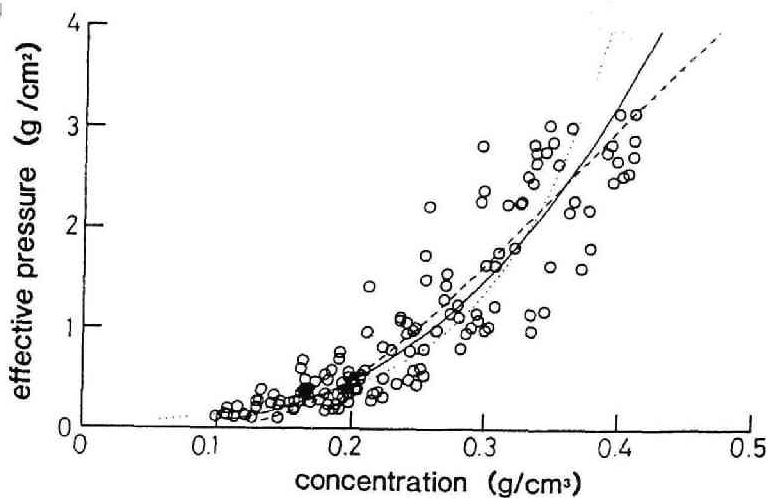
$c_{\min} = 0.085$

$c_{\min} = 0.010$

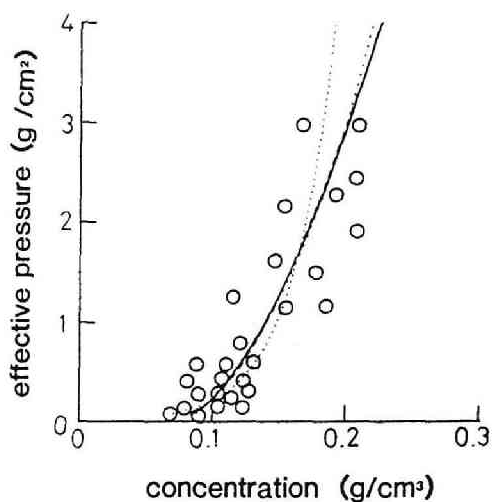
図 2.2.16 有効応力と濃度

—: 1, —: 2,: 3, ----: 4

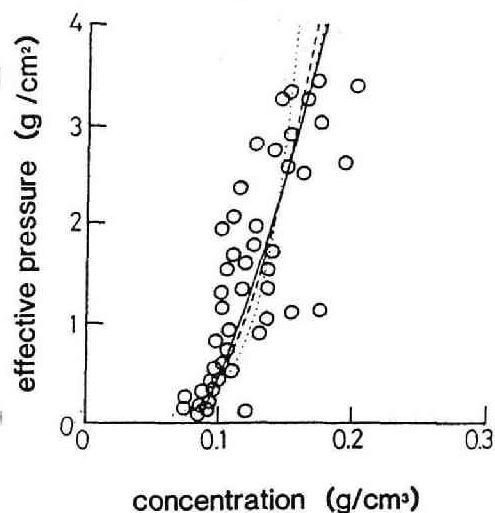
の関数型による適合を示す。



(c) 河川泥1 $a_1^* = 0.114$, $\lambda = 0.376$, $c_{\min} = 0.0131$



(d) 河川泥2 $a_1^* = 0.0692$, $\lambda = 0.576$,
 $c_{\min} = 0.071$



(e) カオリン $a_1^* = 0.0336$, $\lambda = 0.761$,
 $c_{\min} = 0.0821$

もこの関係を拡張し得るかは疑問な点がある。また、間隙率あるいは間隙比を基本パラメータとすることは、上記の沈降速度の検討においてふれたごとく、集塊内外のみかけの間隙比と区別しなければならないからそれほどメリットが

あるものではない。したがってここでは表 2.2.7 にあげた 4 式にてそれぞれに含まれる定数を実験データから非線型最小自乗法によって定め、その時の適合の良否を検討した。適合の基準としては次式によって定義される Φ を用い、これを最小化するパラメータを求めた。

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \{ c_i - c_{\text{cal}}(\sigma_i) \}^2 \quad (2.2.72)$$

ここに N は対象とした泥質あたりの観測回数、 c_i は観測濃度、 σ_i は観測した有効応力、 c_{cal} は表 2.2.7 にて与えられる関数型である。最適化手法としてはシンプレックス法を用いた。図 2.2.16 に示す実線あるいは点線はこの方法によって求められた関数式を示し、 $\#2$ のそれを除いては、いずれもほぼ同様な挙動を示している。したがって関数型の選択にあたっては、これらのうちいずれを採用しても大差はないと考えられるが、ここではこれらの実験の他に従来の報告値による検討結果（表 2.2.8）をも合わせ、次式によって定められる AIC を最小化する関数である $\#1$ を採用した。（表 2.2.9）

$$\text{AIC} = N \ln \left(\frac{\Phi}{N} \right) + 2 \times (\text{パラメータ数}) \quad (2.2.73)$$

表 2.2.7 有効応力の関数型

$\#$	提 案 式	c と の 関 係 式	研 究 者
1	$c = c_{\min} + a_1 \sigma^\lambda$		Kos (1977) ⁸⁸⁾ , 楠田ら (1980) ⁸⁸⁾
2	$c = a_0 + a_1 \ln \sigma$		Shin ら (1974) ⁹¹⁾
3	$e = a_1 (\sigma + \sigma_0)^{-\lambda}$	$c = \rho_a - a'_1 (\sigma + \sigma_0)^{-\lambda}$	矢木ら (1960) ³⁸⁾ , 白戸ら (1970) ³⁹⁾ 栗谷ら (1978) ⁴⁰⁾
4	$W = a_0 + a_1 \ln \sigma$	$c = (a'_0 + a'_2 \ln \sigma)^{-1}$	矢野ら (1976) ⁹³⁾ , Dixon (1980) ⁹⁴⁾ *

$a_0, a_1, c_{\min}, \lambda, \sigma_0$: 定数, e : 空隙率, W : 空隙比

a'_0, a'_1, a'_2 : 定数, ρ_a : 粒子のみかけ密度, $a'_0 = (a_0 + 1) / \rho_a$

$a'_1 = a_1 \rho_a, a'_2 = a_1 / \rho_a$ いずれの関数型も $c \geq 0$ にて使用

*₁ Dixon (1980) による提案式は $\frac{\sigma}{q(\rho^p - \rho^q)} = a_0 10^{-\frac{1}{c}}$ である。

表 2.2.10 に採用されたパラメータを示すが Shinら⁹¹⁾ のものを除き a_1^* ($= a_1 g^\lambda$) は 0.1 程度 (cgs 単位), λ は 0.5 程度の値を示す。但し最終沈降高さ H_∞ に関する従来の報告値から λ を式 (2.2.51) によって推定してみると 0.1~0.3 程度であり両者は一致しない (表 2.2.11)。本実験においても例えば初期濃度 c_0 と H_∞ との関係をプロットしてみると図 2.2.17 のように式 (2.2.51) に基づき推定した傾き (H_0 を一定として $c_0 \propto H_\infty^{\frac{1}{1-\lambda}}$, $\lambda = 0.193$ あるいは 0.376) よりゆるやか (λ は小さくなる) な傾向がうかがわれる。この第一の原因としては両推定法が対象とした濃度範囲の差異にあるものと考えられ, 稀薄濃度時には λ が大になり (圧縮性大), 濃厚時には λ が小となる (圧縮性小) ことを反映したものと思われる。したがってこうした広

表 2.2.8 有効応力関数の適合成績

dispersion : Φ/N , № : 関数番号, order : AIC 順位

(a) 本 研 究

Kind	№	dispersion	AIC	order
Kaoline	1	0.5474E-03	-354.5	1
	2	0.6158E-03	-350.8	4
	3	0.5482E-03	-352.4	3
	4	0.5870E-03	-353.1	2
Lake mud-1	1	0.2495E-03	-790.4	2
	2	0.2494E-03	-792.5	1
	3	0.2493E-03	-788.5	3
	4	0.2653E-03	-786.5	4
Lake mud-2	1	0.4547E-03	-209.5	3
	2	0.4702E-03	-210.5	1
	3	0.4803E-03	-206.0	4
	4	0.4850E-03	-209.7	2
River mud -1	1	0.2234E-03	-1289.	1
	2	0.2562E-03	-1270.	4
	3	0.2242E-03	-1286.	2
	4	0.2346E-03	-1283.	3
River mud -2	1	0.4364E-03	-202.9	2
	2	0.5441E-03	-198.9	4
	3	0.4304E-03	-201.3	3
	4	0.4650E-03	-203.2	1

(b) 従来の報告値

Kind	N	dispersion	AIC	order
WTP floc (Kos)	1	0.1129E-04	-2090.	1
	2	0.1240E-04	-2075.	4
	3	0.1134E-04	-2087.	2
	4	0.1192E-04	-2082.	3
WTP sludge no stirring (Shin)	1	0.6411E-03	-192.5	1
	2	0.1329E-02	-174.8	3
	3	0.2020E-02	-159.5	4
	4	0.1069E-02	-180.7	2
WTP sludge 2 rpm (Shin)	1	0.7717E-03	-209.0	1
	2	0.2285E-02	-178.4	4
	3	0.8798E-03	-203.1	3
	4	0.9163E-03	-205.9	2
WTP sludge 5 rpm (Shin)	1	0.7541E-03	-274.4	1
	2	0.2465E-02	-230.2	4
	3	0.1273E-02	-252.0	3
	4	0.1027E-02	-264.4	2
Waste sludge (Kusuda)	1	0.1731E-05	-392.0	2
	2	0.1728E-05	-394.1	1
	3	0.1729E-05	-390.0	3
	4	0.3348E-05	-374.2	4
Clay sludge with polymer-1 (Kusuda)	1	0.1714E-04	-433.0	1
	2	0.4093E-04	-400.1	4
	3	0.1740E-04	-430.4	3
	4	0.1863E-04	-431.6	2
Clay sludge with polymer-2 (Kusuda)	1	0.1689E-04	-246.7	1
	2	0.9028E-04	-210.2	3
	3	0.8067E-04	-208.8	4
	4	0.2162E-04	-243.1	2

表 2.2.9 有効応力関数の適合順位

No	式 型	パラメータ数	適 合 平 均 順 位		
			本研究	報告値	総 合
1	$c = c_{\min} + a_1 \sigma^\lambda$	3	1.8	1.1	1.4
2	$c = a_0 + a_1 \ln \sigma$	2	2.8	3.3	3.1
3	$c = \rho_a - a'_1 (\sigma + \sigma_0)^{-\lambda}$	4	3.0	3.1	3.1
4	$c = (a'_0 + a'_1 \ln \sigma)^{-1}$	2	2.4	2.4	2.4

A I C 基準による適合順位の平均値を示す。本研究 5 ケース，報告値 7 ケース，計 12 ケースの結果である。

表 2.2.10 有効応力関数のパラメータ

	試 験 範 囲	a_1^*	λ	$c_{\min}(\text{g/cm}^3)$	備 考
湖 底 泥	$c = 0.06 \sim 0.2 \text{ g/cm}^3$	$6.0 \sim 15.3 \times 10^{-2}$	$0.193 \sim 0.508$	$0.01 \sim 0.085$	} 本 研 究
河 川 泥 1	$c = 0.06 \sim 0.24 \text{ g/cm}^3$	11.4×10^{-2}	0.376	0.0131	
河 川 泥 2	$c = 0.06 \sim 0.22 \text{ g/cm}^3$	6.92×10^{-2}	0.576	0.071	
カ オ リ ン	$c = 0.1 \sim 0.2 \text{ g/cm}^3$	3.36×10^{-2}	0.761	0.0821	
浄水場汚泥	$c = 0.1 \sim 0.4 \text{ g/cm}^3$	$(2.85 \sim 7.10 \times 10^{-1})$	$(0.73 \sim 2.08)$	$\cong 0.1$	Shin 5 (1974) ⁹¹⁾
河川水バンドブロック	$c = 0.01 \sim 0.035 \text{ g/cm}^3$	14.1×10^{-2} (9.42×10^{-2})	0.7578 (0.555)	0.008 (0.0056)	Kos (1977) ⁹⁹⁾
下水汚泥ポリマーフロック	$\frac{\sigma}{\rho_l q} = 0 \sim 1.5 \text{ cm}$	—	0.5 (0.41 ~ 0.60)	—	楠田ら (1980) ⁶⁶⁾

$c - c_{\min} = a_1 \sigma^\lambda$, c : 濁質濃度 (g/cm^3), σ : 有効応力 (dyn/cm^2), $a_1^* = a_1 q^\lambda$

() 内は図から読み取ったデータより推定したパラメータ値である。

表 2.2.11 H_{∞} から推定した λ の値

	λ	研究者
カオリン	0.27	Free (1916) ⁵⁶⁾
	0.14	吉岡ら (1955) ⁸⁰⁾
CaCO ₃	0.06	} Talmage ら (1955) ⁵⁰⁾
セメントロックA	0.27	
セメントロックB	0.11	
metallurgical pulp	0.18	
カオリンフロック	0.2~0.3	Michaels ら (1962) ³⁰⁾
CaCO ₃	0.16	Tory ら (1965) ⁵⁰⁾
ZnO	0.11	} 白戸ら (1970) ³⁹⁾
Fe ₂ O ₃	0.10	
カオリンフロック	0.2	} 徳積 (1977) ⁸²⁾
河川濁質フロック	0.2	
凝集剤過剰フロック	0.1	
カオリン・モンモリロナイト, 湖泥 (6 湖)	$\cong 0.2$	大坪 (1983) ⁹⁵⁾

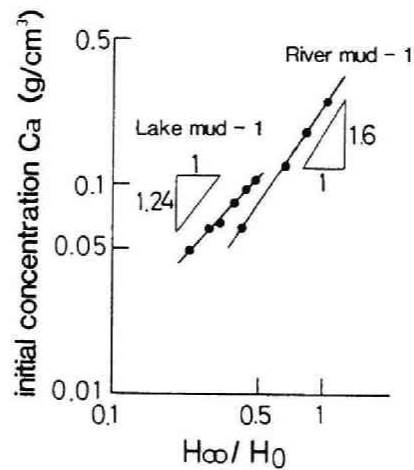


図 2.2.17 最終沈降高さ H_{∞} と初期濃度 c_a
 H_0 を一定としている。

範囲における $\sigma - c$ の関係を表わす場合には本研究が仮定した巾乗関係と異なった関数型あるいは沈降関数のように多領域に分割した関数型⁹²⁾の方が有利となることも十分考えられ、上記の適合計算を再度検討する必要がある。

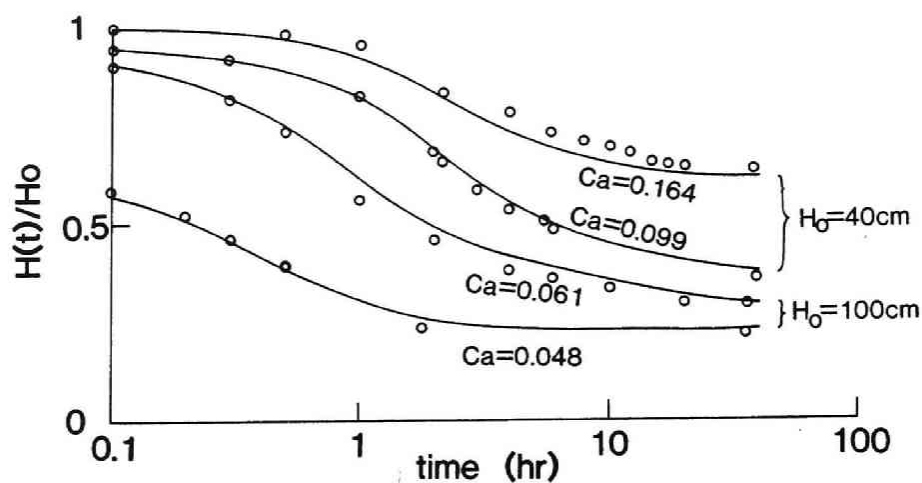
2.2.5 数値シミュレーション

本節では沈降圧密に関する回分実験での結果を先に述べた数値計算によってシミュレートしその比較検討を行う。計算に使用した諸元は表 2.2.12 に示したものである。図 2.2.18(a),(b) は 湖泥 - 1 及び河川泥 - 1 の計算沈降曲線を

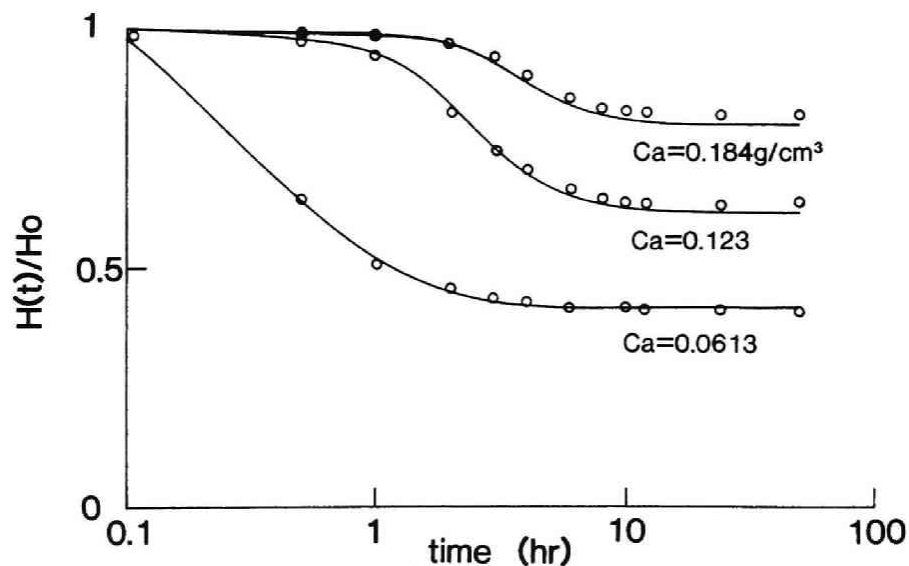
表 2.2.12 計算に使用した諸定数

Δz	1.0 cm
Δt	0.5 ~ 6 秒
N	100 (水深 100 cm), 40 (水深 40 cm)
計算時間	約 0.34 秒 / 1 Δt ステップ (VAX11/780 による)
使用スキーム	表 (2.2.2), $\alpha = 2.118$, $\beta = 0.5$

示したものであり、実測値と比較的良好な適合を示す。またこの際の濃度分布の径時変化を図 2.2.19(a),(b) に示す。さらに有効応力、あるいは液相流速分布 u^l の計算結果の一部を図 2.2.20, 2.2.21 に示す。濃度分布に関しては比較的良好な結果を示すが、有効応力分布に関してはバラツキが大きい。この傾向は他のシミュレーション結果においても同様に観測され、沈降初期においては計算曲線は観測値にくらべ過小側に、時刻が経過するにつれ過大側に移行する場合が多く見られた。本研究の仮定によれば濃度 c と有効応力 σ 間には一意的な対応が存在するはずであり、したがってそのどちらかが適合すればそれに伴って他方も一致しなければならない。しかるにこうした偏倚が発生するのは、有効応力の測定誤差が大きいことの他に、同一濃度であっても沈降の経過に伴



(a) 湖底泥 1

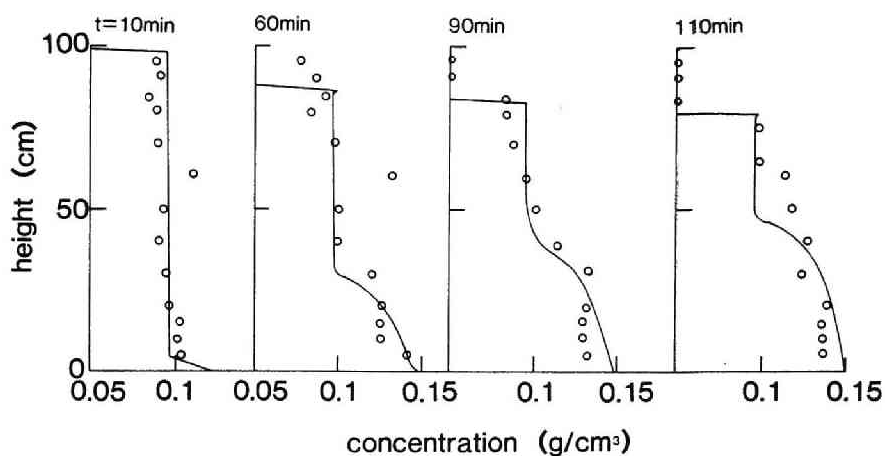


(b) 河川泥 1, $H_0 = 100$ cm

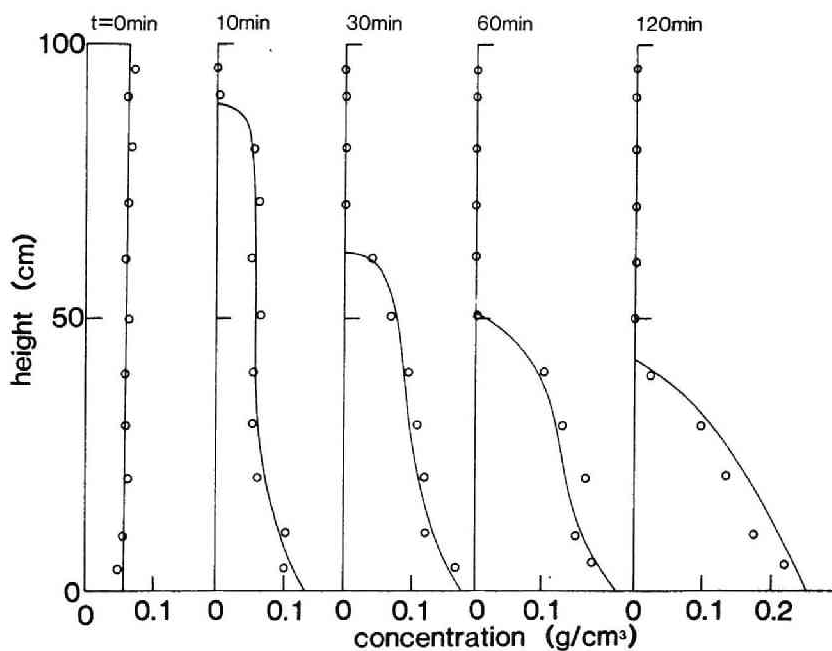
図 2.2.18 界面沈降曲線

○は測定値

って発生する有効応力が変化することなどが考えられる。特に後者の点に関しては一様場沈殿速度 u_0^p も同様な挙動を示すことが報告されており、 $Kos^{70)}$ 、あるいは楠田ら⁶⁸⁾は σ 、あるいは u_0^p を ϵ のみならず、固相表面に作用するせん断力 τ の関数であるとしたモデル化を行なっているが、それらのモデルに含



(a) 湖底泥-1, $c_a = 0.0955 \text{ g/cm}^3$



(b) 河川泥-1, $c_a = 0.0613 \text{ g/cm}^3$

図 2.2.19 濃度分布の経時変化

○は測定値

まれるパラメータも必ずしも定数ではなく濃度によって変化することが報告されている⁷⁰⁾ したがってそのモデル化にあたってはかなり複雑なものを覚悟しなければならず、同定すべきパラメータも多くなる。そこで、本研究においてはこうした方向のアプローチを取らず、検討すべき沈降圧密の基礎モデルを移

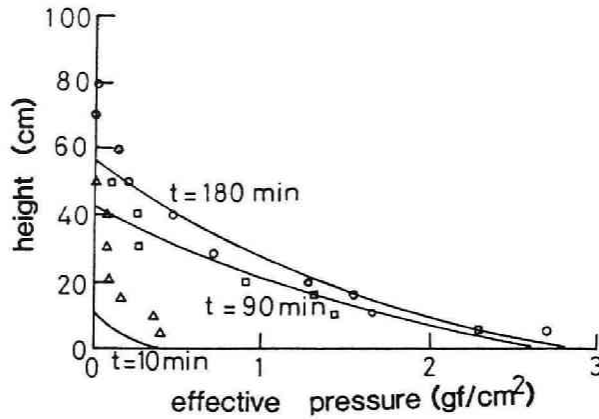


図 2.2.20 有効応力の分布

△ : 10 分, □ : 90 分, ○ : 180 分での測定値
湖底泥-1, $c_a = 0.0955 \text{ g/cm}^3$

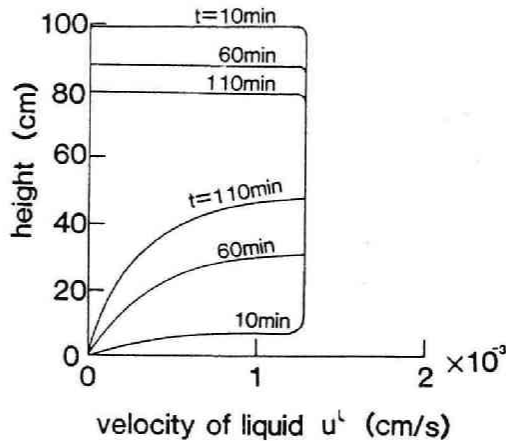


図 2.2.21 液相流速。湖底泥-1

$c_a = 0.0955 \text{ g/cm}^3$

流拡散型のものに留めており、その範囲において σ あるいは u_0^p を c のみの関数であると限定したのである。

次に沈降圧密現象における圧縮効果の影響を検討するために λ に関する濃度分布の感度計算例、あるいは有効応力項を除去した場合の沈降曲線の計算例を図 2.2.22, 2.2.23 にあげる。これらの図において圧縮項が界面移動に対し大きな影響を示していることが明白に示されている。第 2.2.3 節にて圧縮効果の界面沈降速度に及ぼす影響を示すパラメータとしてペクレ数 P_e をあげているが、これと、数値計算から得られた Kynch 法による沈降速度の推定誤差（計算界面沈降曲線から Kynch 法によって一様場沈降速度 (u_h) を推定し、これ

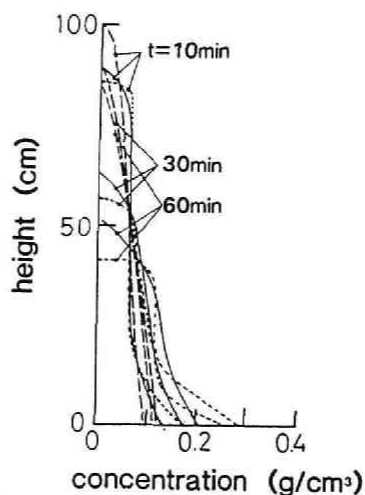


図 2.2.22 濃度分布に対する有効応力の感度

河川泥-1 のパラメータによる。

実線: $a_1^* = 0.114$, 破線: $a_1^* = 0.228$

点線: $a_1^* = 0.057$, $c_a = 0.0613 \text{ g/cm}^3$

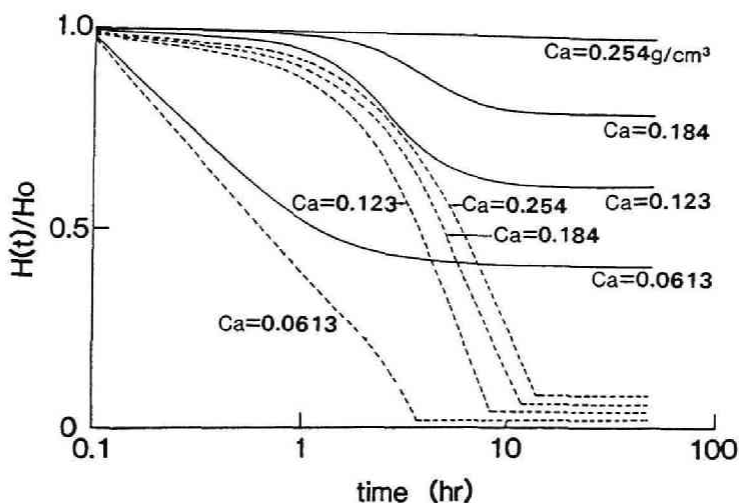


図 2.2.23 界面沈降曲線

河川泥 1, $H_0 = 100 \text{ cm}$, 点線は圧縮項を除いた場合

と計算にて使用した実際の u_0^p との比) をプロットしたものを図 2.2.24 に示す。この図から(1)沈降速度推定を行った際の界面高 $H(t)$ が最終沈降項 H_∞ と同じオーダーであり, (2)圧縮度を示すパラメータである λ が大きい時に得られる推定沈降速度 u_h には大きな誤差が含まれることを覚悟しなければならないことがわかる。

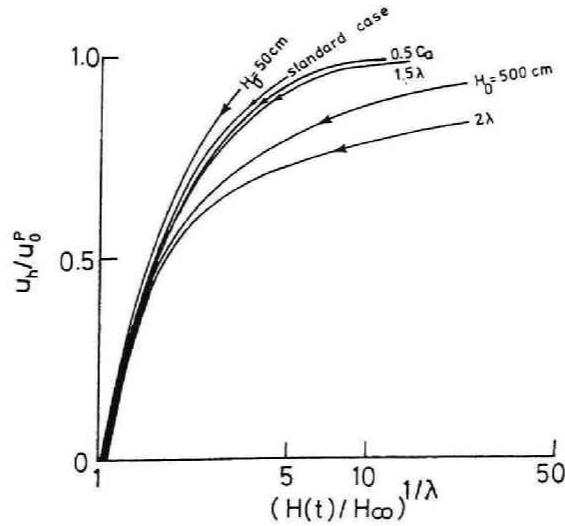


図 2.2.24 Kynch法による推定沈降速度 u_h とペクレ数
 河川泥-1, $H_0=100$ cm, $c_a=0.0613$ g/cm³,
 $\lambda=0.376$ を標準とする。

以上, 本節においては沈降圧密に関する回分実験データをそれに対応する数値計算結果と比較し次の結果を得た。

- (1) 数値シミュレーションによって濃度分布, 界面沈降曲線の経時変化を追跡することがほぼ可能である。
- (2) 有効応力の再現性は良好とはいえず, これを再現するにはより実際機構に則したモデルを使用する必要がある。但し沈降槽設計あるいはその他の場合においても問題となるのは濃度分布, 界面挙動の場合が多く, 有効応力は二次的な状態量と考えてよい。したがって有効応力あるいは沈降速度自体の精度高い把握なくとも, その平均的な挙動を知ることによってより簡単に濃度分布・界面挙動を追跡できるならばその方が都合よい。本モデルがめざす点もここにある。
- (3) 圧縮効果による Kynch 法沈降速度推定誤差の目安は次のペクレ数 P_e によってほぼ推定できる。

$$P_e = \left(\frac{H(t)}{H_\infty} \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

P_e が 1 に近い程推定誤差が大きい。

2.3 凝集破壊モデルとその数値シミュレーション

2.3.1 概 説

水中における浮遊性粒子の挙動を解析する時に凝集性が問題となることしばしばある。水処理の分野では既に紀元前2000年頃から凝集剤による水質調整が行なわれていたと言われ⁹⁶⁾、また現在における薬品凝集の重要性は言うまでもない。一方、湖沼・感潮部などの環境水系中においても凝集性をもった浮遊粒子群の挙動がしばしば問題となり、水系中の物質循環等に大きな影響を及ぼすことが主張されている^{97), 98)}。

水中にて集塊せずに単分散している粒子を通常、一次粒子 (primary particle) と称するが、これらが (1) 近接・付着可能な状態であり、(2) 粒子間の衝突を促進する何らかの要因があるならば集塊を始める。こうして生成された集塊は、フロック、コアギュレート、アグロメレートなどと称されるが、これらのうち浮遊粒子の挙動解析を行なう上で問題となるものはフロック (Floc, 元来はFlocculeの略語) である。フロックとは上記の集塊のうちもっとも結合状態がゆるいものであり、極めて高い含水率を特徴とする。そのため水中での沈降速度が小さく脆弱であり、わずかの外力によって破壊される。また含水率、結合強度等は粒子によって異なり、特に粒度と強い相関をもつ。

本節ではこうした水中浮遊粒子の挙動のうち特に凝集・破壊の動力学という立場から粒度分布変化の予測手法の確立に努めている。研究の方法としては粒度分布の変化を記述する「一般化動力学方程式 (General Dynamic Equation, GDE)」を中心にそれに関連する個々のサブプロセスに検討を加えながら、予測手法としての精緻化を図った。本節ではその対象を特に浄水処理フロック形成プロセスと想定しているが、結果の多くはそれに留まることなく一般水系中における凝集性浮遊粒子にも適用可能である。すなわち近年、環境水系中の凝集性浮遊粒子に対する解析がしばしば行われているが^{99) - 104)}、本節はそれらに対してもいくつかの基礎的な知見を与え得るものとする。

最後に本節にて得られた諸点を列記すると次のようになる。

- (1) GDEの解法として区分領域法を適用し、広範囲にわたる粒度をもった粒子群の数値シミュレーション手法を確立した。(第2.2.3節)
- (2) 大粒径 (ミクロスケール以上) の粒子の乱流凝集係数を導出した。(第

2.3.6 節)

- (3)破壊プロセスの定量的記述に努めた。(第2.3.7節)
 (4)衝突合一確率のモデル化を行なった。(第2.3.8節)
 (5)上記の結果を結合し粒度分布変化予測手法の精緻化を図った。(第2.3.9節)
 (6)粒度分布中に存在するいくつかの平衡小領域の予測を行なった。(第2.3.10節)

2.3.2 凝集性浮遊粒子に関する基礎方程式

凝集性をもつ浮遊粒子の記述にあたっては空間的、時間的な領域のみでの解析は不十分であり、粒度に関する考慮が必要となる。いま、粒度変化の要因が主として凝集、破壊によって生じている時を考えることにすると、これを記述する基礎方程式としては、例えば次のように記すことができる。

$$\frac{\partial n(w)}{\partial t} + \nabla \cdot (v n(w)) = \nabla \cdot (D \nabla n(w)) + \left[\frac{\partial n(w)}{\partial t} \right]_{C_{oag}} + \left[\frac{\partial n(w)}{\partial t} \right]_{Br} \quad (2.3.1)$$

ここに $n(w)$ は粒子中に含まれる固相部質量が w であるような粒子の粒子数密度、 v はその粒子の速度、 D は拡散係数であり、 t は時刻を表わす。また、 $[\partial n(w)/\partial t]_{C_{oag}}$ は粒子の衝突合一(凝集)による、 $[\partial n(w)/\partial t]_{Br}$ は破壊による粒子数変化を示す項である。凝集性浮遊粒子の挙動を特徴付けるのはこの2つの項である。

まず、 $[\partial n(w)/\partial t]_{C_{oag}}$ に関しては、本研究で対象としているアクアゾルのみならず、エアロゾルなどの分野においても古くから関心が持たれ、 $K(w', w)$ を凝集係数、 α を衝突合一係数として次のように表わされる。

$$\left[\frac{\partial n(w)}{\partial t} \right]_{C_{oag}} = \frac{1}{2} \int_0^w \alpha K(w', w-w') n(w') n(w-w') dw'$$

$$-n(w) \int_0^{\infty} dK(w, w') n(w') dw' \quad (2.3.2)$$

式(2.3.2)はSmoluchowski¹⁰⁵⁾が1917年にその離散形を導びき、1928年にMüller¹⁰⁶⁾が上のような連続的な表現を与えたものである。一方、 $[\partial n(w)/\partial t]_{Br}$ については粉碎理論などで取り扱われていたが、物質収支論的に明確な根拠をもったものとしては、Bass¹⁰⁷⁾、およびAustinら¹⁰⁸⁾のものがあり、ここではそれを修正した

$$\left[\frac{\partial n(w)}{\partial t} \right]_{Br} = -P_b(w) n(w) + \int_w^{\infty} \frac{w'}{w} \frac{\partial}{\partial w} B(w, w') n(w') dw' \quad (2.3.3)$$

を採用する。ここに $B(w, w')$ とは w' の粒子が破壊して w 以下の粒子となる割合(質量基準)であり、 $P_b(w)$ とは $B(w, w)$ 、すなわち単位時間あたりに w の粒子が破壊されていく割合を表わし選択関数(selection function)と呼ばれるものである。したがって、いま

$$B(w, w') = P_b(w') G(w, w') \quad (2.3.4)$$

と記せば、 $G(w, w')$ は w に関する 0 から 1 の間の増加関数であり、特に

$$G(0, w') = 0, \quad G(w', w') = 1 \quad (2.3.5)$$

が成立する。これは通常、破砕関数(breakage function)と呼ばれる。

$K(w, w')$ 、及び $B(w, w')$ は、粒子を取りまく流体の運動状況、あるいは粒子の物性などによって大きく異なり、その一般的な解析は困難であるが、 $K(w, w')$ に関しては流体場を限定し、かつ粒子を球形と近似した場合にいくつかの解を得ることができる。表 2.3.1¹⁰⁹⁾ がその例であり、これらを比較した図 2.3.1 によって粒径 $1\mu\text{m}$ 以上の粒子が通常の流れ場におかれている時には、水処理装置では乱流凝集が、一般水系では沈降凝集が問題となることかわかる。

表 2. 3. 1 凝 集 係 数

機 構	$K (d_1, d_2)$	備 考
ブラウン運動	$2\pi (d_1 + d_2) (D_1 + D_2)$	Smoluchowski (1917)
速度勾配	$1/6 \cdot G (d_1 + d_2)^3$	Smoluchowski (1917)
乱 流	$1.30/8 \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2} (d_1 + d_2)^3$	Saffman・Turner (1956)
	$24\pi\beta_L/8 \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2} (d_1 + d_2)^3$	Levich (1962)
重力沈降	$\pi/4 v_1 - v_2 (d_1 + d_2)^2$	Müller (1962)

 d : 粒径 D : 粒子の拡散係数 $\cong kT/(3\pi\mu d)$ k : ボルツマン係数 T : 絶対温度 μ : 粘性係数 ϵ : エネルギー逸散率 (単位質量当り) β_L : Levich の係数 G : 速度勾配 v : 沈降速度

表 2. 3. 2 破壊関数とその適合性

選択関数	破壊関数	最小 Φ 値(%)	係 数 値	備 考
(1) $\alpha_2 w^{b_n}$	$(w/w')^m$	4.5	$b_n = 1.75$ $m = 1.25$	中島ら (1973 ¹³⁰⁾ , 1974 ¹⁴⁴⁾
(2) $\alpha_2 w^{b_n}$	$1 - (1 - \frac{w}{w'})^m$	8.6	$b_n = 1.75$ $m = 0.85$	Gaudinら (1962 ¹⁴⁵⁾
(3) $\alpha_2 w^{b_n}$	$1 - e^{-m w/w'}$	16.5	$b_n = 1.75$ $m < 0.001$	桑原ら (1969 ¹⁴⁴⁾
	$1 - e^{-m}$			

検定に使用したフロックはカオリン 30 mg/l Al 1.57~6.31 mg/l によって構成され、ALT比、形成G値、破壊G値などを変数として12ケースの検定実験をおこなった。

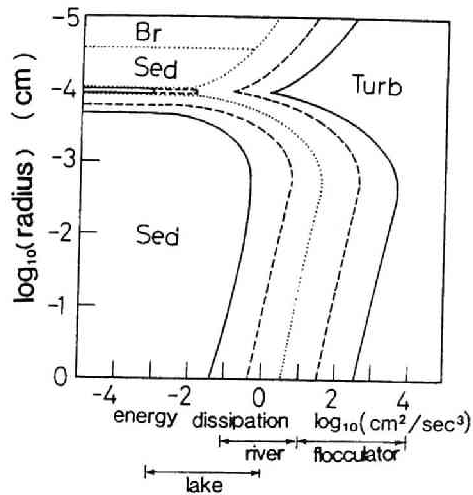


図 2.3.1 卓越する凝集機構

実線：他の機構より10倍以上大きい

破線：他の機構より3倍以上大きい

点線：他の機構より1倍以上大きい

Br：ブラウン運動， Sed：沈降， Turb：乱流機構

被衝突粒子半径：1 μm ， 粒子有効密度 $\rho_e = \min(1.6, 1.0 \times 10^{-3} \times d^{-1.2})$ ，

d ：粒径(CGS単位)， 水温：20°C， 表 2.3.1の凝集係数を使用。

いっぽう $B(w, w')$ に関しては粉碎の分野において表 2.3.2 に示すようにいくつかのものが提案されてはいるが凝集性粒子，特にフロックなどの集塊力がきわめて弱く流体力によって破壊が進行するような場合への適用はほとんど行なわれていない。したがって，その使用にあたっては充分の注意が必要となる。

式 (2.3.1)，(2.3.2) あるいは式 (2.3.3) はいずれも粒子中に含まれる固相部の質量を粒度の基礎量としたものであったが，これはこの質量が粒子の衝突，破壊などのプロセスにおいて保存されると仮定したためである。従来の研究においてはしばしば粒子体積を保存量として取り扱っているが，フロックなどのように含水率が粒径に対し大きく依存するような粒子ではこの取り扱いが好ましくない。

たとえば，粒子体積 v を w の関数として

$$v = v(w), \quad \text{あるいは} \quad w = w(v) \quad (2.3.6)$$

と書くことにすれば

$$n(w) dw = n(v) dv \quad (2.3.7)$$

の関係から

$$\begin{aligned} \left[\frac{n(v)}{\partial t} \right]_{C_{oag}} &= \frac{1}{2} \int_0^v \alpha K(v', v'') n(v') n(v'') \left(\frac{dv}{dw} \right)_{v''} \left(\frac{dw}{dv} \right)_v dv' \\ &\quad - \int_0^\infty \alpha K(v', v) n(v') n(v) dv' \quad (2.3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial n(v)}{\partial t} \right]_{B\tau} &= -P_b(v) n(v) + \int_v^\infty \frac{w(v')}{w(v)} \left(\frac{dw}{dv} \right)_{v'} n(v') \frac{\partial}{\partial v} \\ &\quad B(v, v') dv' \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

となる。但し $v'' = v(w(v) - w(v'))$ とする。フロック密度においてしばしば行なうように固相真密度 ρ_p 、液相真密度 ρ_l 、粒径 d とフロック有効密度 ρ_e の関係として

$$\rho_e = \begin{cases} a d^{-K\rho}, & d \geq d_c \\ \rho_p - \rho_l, & d < d_c \end{cases} \quad (2.3.10)$$

とすれば

$$\frac{dw}{dv} = \begin{cases} \frac{(3-K\rho) a \rho_p}{3(\rho_p - \rho_l)} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{-\frac{K\rho}{3}} v^{-\frac{K\rho}{3}}, & v \geq v_c \\ \rho_p, & v < v_c \end{cases} \quad (2.3.11)$$

となる。ここに $a, K\rho$ は定数 d_c, v_c は

$$d_c = \left(\frac{\rho_p - \rho_l}{a} \right)^{-\frac{1}{K\rho}} \quad (2.3.12)$$

$$v_c = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\rho_p - \rho_l}{a} \right)^{-\frac{3}{K\rho}} \quad (2.3.13)$$

である。したがってこれらを式(2.3.8), (2.3.9)に代入して計算を行う必要が生ずる。また粒径を基礎量として取り扱う場合にも同様にして変数変換に関するヤコビアンを考慮する必要があることは言うまでもない。

2.3.3 凝集性浮遊粒子に関する数値シミュレーション

凝集性浮遊粒子に関する挙動を把握するためには式(2.3.2), (2.3.3)を何らかの方法によって解析することが必要となる。いくつかの方法が行なわれており、それらを大別すると次のようになる。

(1)解析的方法¹¹⁰⁾

(2)自己保存仮定などを用いる半解析的方法^{111), 112)}

(3)モーメント法などの逐次解法^{113), 114)}

(4)数値解法

(1)は凝集係数、破壊関数が定数あるいは w に関し線型などの特定な形を有する時のみ有効である。(2)の自己保存仮定に基づく方法は式(2.3.2)を相似解法によって解こうとするもので自己保存解の存在を先験的に仮定しなければならないこと、凝集係数に条件¹¹⁵⁾を荷さなければならないこと等の難点がある。(3)に属する方法としては変数変換などに基づく関数展開などもあるが、いずれにせよ解析は容易でないことが多く、その適用範囲も限られる。

結局、数値解法以外では解析し得る範囲が非常に限られており実用となる場合も少ない。したがって本研究においても数値解法を基本とするが、従来からしばしば使用されてきた Smoluchowski 式に基づく離散的な方法(表 2.3.3 の(1))では水系において問題となる粒径 $0.1 \mu\text{m} \sim 1 \text{mm}$ と云った広範囲にわたる粒度を取り扱うには次元数が膨大となりそのままでは到底実用に耐えるものではない。同様な問題は連続的なそれを取り扱う場合にも発生し、たとえばこれを計算労力の点のみの事情で疎間隔での差分によって計算を行なってみると質量の収支違反などの離散化誤差が目立ち、計算結果の信頼性が極めて悪くなる。いっぽう、表 2.3.3 の(3)に示す方法はこれらの欠点を補うために開発されてきたものであり、計算労力・計算誤差などを総合的に許容できる範囲に納める方法として有効と考えられる。ただし、これらの方法に関する従来の取り扱い

表 2.3.3 凝集性粒子の数値シミュレーション（アクアゾルを中心として）

方 法	研 究 者	備 考
(1) 離散系を基礎式とする方法	Fair ら (1963) ¹¹⁶⁾	粒子を1部粒子, 2倍粒子, ..., N 倍粒子と分け各々倍の粒子について成立する常微分方程式を解く。離散式を基礎式系とするために離散化による誤差に関する配慮は必要ではないが, 粒径範囲が広がるにつれて次元数が大量に増加する。
	丹保 (1965) ¹¹⁷⁾	
	森ら (1968) ¹¹⁸⁾	
	楠田ら (1977) ¹¹⁹⁾	
	宇治 (1978) ¹²⁰⁾	
(2) 連続系を差分化する方法	エアロゾル	粒度軸に対し差分をおこない式(2.3.2)右辺の積分は数値積分法によっておこなう。粒径範囲が広がるにつれて離散化誤差が増大する。
	Lindauer (1971) ¹²¹⁾ など	
	アクアゾル Lawler ら (1980) ¹²²⁾	
(3) 離散化誤差を考慮し計算粒度の増大をはかる方法	エアロゾル	粒子の大きさを対数的に分割し, 区分内では一定の分布を仮定することによって式(2.3.2)に対応する式を作成する。 分布の補間関数としては一定値, スプライン関数などが使用されている。また分布の移行に伴い分割点を移動する方法もある。 古賀らの方法は粒子の1つずつに注目し, それらが衝突する確率をモンテカルロ法で求めるもの。
	Tolfo (1977) ¹²³⁾	
	Gelbard ら (1978, 1980) ^{124), 125)}	
	アクアゾル	
	丹保ら (1979) ¹²⁶⁾ 古賀ら (1980) ¹²⁷⁾	

いではその導出を直観的に行なったものが多く式(2.3.2), (2.3.3)で示されるいわゆるGDE (general dynamic equation) との関係も必ずしも明らかなものではなかった。そこで、本節では一貫した方法によって GDE の取り扱いを行い計算労力・精度共に許容し得る計算法の開発を試みている。これは対象とする w 軸の範囲を N 区分し、区間内の平均粒子固相部濃度 c_l ($l = 1, 2, \dots, N$) を未知数とした上で、GDE から c_l に関する物質収支式を導びくものであり、 $n(w)$ に関する式(2.3.2)から考えるならば重み付き残差法の一様である部分分割(領域)法¹²⁸⁾を適用していることになる。 w 軸の区分を図 2.3.2 のように行なうならば c_l と $n(w)$ の関係は

$$c_l = \frac{1}{w_l - w_{l-1}} \int_{w_{l-1}}^{w_l} w n(w) dw \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (2.3.14)$$

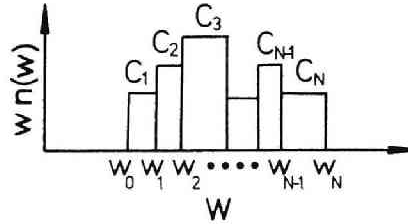


図 2.3.2 粒度軸の区分

であり c_l に関する基礎式は式(2.3.1)に w を乗じ $[w_{l-1}, w_l]$ で積分することによって得られるから

$$\frac{\partial c_l}{\partial t} + \mathcal{P} \cdot (v_l c_l) = \mathcal{P}(D\mathcal{P}c_l) + \left[\frac{dc_l}{dt} \right]_{C_{oag}} + \left[\frac{dc_l}{dt} \right]_{Br} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned} (w_l - w_{l-1}) \left[\frac{dc_l}{dt} \right]_{C_{oag}} &= \frac{1}{2} \int_{w_{l-1}}^{w_l} dw w \int_0^w dw' \alpha K(w', w-w') n(w') \\ &\quad n(w-w') dw \\ &\quad - \int_{w_{l-1}}^{w_l} dw n(w) w \int_0^\infty dw' \alpha K(w', w) n(w') \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned}
(w_l - w_{l-1}) \left[\frac{d c_l}{d t} \right]_{Br} &= - \int_{w_{l-1}}^{w_l} d w w n(w) P_b(w) \\
&+ \int_{w_{l-1}}^{w_l} d w \int_w^\infty d w' n(w') w' P_b(w') \frac{\partial}{\partial w} G(w, w')
\end{aligned} \quad (2.3.17)$$

ここで v_l は区間 $[w_{l-1}, w_l]$ における粒子の平均速度であり

$$v_l = \frac{\int_{w_{l-1}}^{w_l} v(w) n(w) w d w}{\int_{w_{l-1}}^{w_l} w n(w) d w} \quad (2.3.18)$$

によって定義される。式 (2.3.16) ~ (2.3.18) の右辺を取り扱うにあたっては区間 $[w_{l-1}, w_l]$ 内の $n(w)$ の形状が必要となるが、今もっとも簡単な方法として

$$n(w) = \frac{c_l}{w}, \quad w_{l-1} \leq w < w_l \quad (2.3.19)$$

と仮定すれば

$$\begin{aligned}
(w_l - w_{l-1}) \left[\frac{d c_l}{d t} \right]_{Coag} &= \frac{1}{2} \sum_{I_l} c_i c_j \iint_{A(i, j, l)} \alpha \frac{w' + w''}{w' w''} K(w', w'') \\
&\quad d w' d w'' \\
&- c_l \sum_{i=1}^N c_i \int_{w_{l-1}}^{w_l} d w'' \int_{w_{i-1}}^{w_i} \alpha \frac{K(w', w'')}{w'} d w' \quad (2.3.20)
\end{aligned}$$

$$(w_l - w_{l-1}) \left[\frac{d c_l}{d t} \right]_{Br} = - c_l \int_{w_{l-1}}^{w_l} P_b(w) G(w_{l-1}, w) d w$$

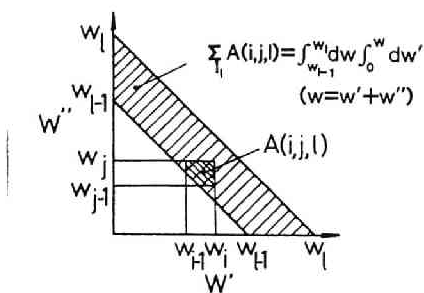


図 2.3.3 (a) 式 (2.3.20) の積分

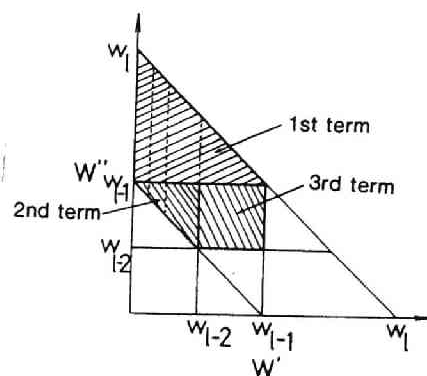


図 2.3.3 (b) 式 (2.3.27) の積分

$$+ \sum_{i=l+1}^N c_i \int_{w_{i-1}}^{w_i} dw' P_b(w') [G(w_i, w') - G(w_{i-1}, w')] \quad (2.3.21)$$

となる。ここに $A(i, j, l)$ とは $w_{i-1} \leq w' < w_i$, $w_{j-1} \leq w'' < w_j$, かつ $w_{l-1} \leq w' + w'' < w_l$ によって規定される領域であり I_l とは $A(i, j, l)$ が空でない (i, j) の組合わせを示す (図 2.3.3(a))。式 (2.3.20), (2.3.21) はそれぞれ凝集あるいは破壊による区間 $[w_{l-1}, w_l]$ 内における固相質量の変化を示しているが、これらの作用は全固相質量を変化させるものではない。したがってこの条件が満足されているかを検討するために式 (2.3.20), (2.3.21) を l について加え合わせてみると

$$\sum_{l=1}^N (w_l - w_{l-1}) \left[\frac{dc_l}{dt} \right]_{Coag} = - \sum_{I_{N+1}} c_i c_j \iint_{B(i, j)} d \frac{K(w', w'')}{w'} dw' dw'' \quad (2.3.22)$$

$$\sum_{l=1}^N (w_l - w_{l-1}) \left[\frac{d c_l}{d t} \right]_{B r} = - \sum_{i=1}^N c_i \int_{w_{i-1}}^{w_i} P_b(w') G(w_0, w') dw' \quad (2.3.23)$$

但し、 $B(i, j)$ とは $w_i \leq w' < w_{i+1}$, $w_j \leq w'' < w_{j+1}$ かつ $w_N \leq w' + w''$ によって規定される領域であり I_{N+1} とは $B(i, j)$ が空でない (i, j) の組合せを示す。式 (2.3.22), (2.3.23) の物理的意義は明白である。すなわち式 (2.3.22) は凝集した粒子が w_N 以上となる, また式 (2.3.23) は破壊した粒子が w_0 以下となる速度をあらわし, いずれの場合においても対象とする 粒度範囲 $[w_0, w_N]$ から漏出する質量を表わしている。したがって粒度範囲の設定にあたってはこうした漏出量が微小になるように選ぶ必要があるが, その他に凝集係数, 破壊関数を次のように修正することによっても質量保存則を正確に維持することができる。

$$K(w', w'') \rightarrow K(w', w'') H(w' + w'' \leq w_N) \quad (2.3.24)$$

$$G(w, w') \rightarrow \frac{G(w, w') - G(w_0, w')}{1 - G(w_0, w')} \quad (2.3.25)$$

ここに $H(x \leq y)$ とは $x \leq y$ の時 1, それ以外では 0 となる関数である。式 (2.3.24) は丹保ら¹²⁹⁾が粒子の最大成長径以上の成長を抑制するために仮定したものと同様であるが, 本研究では破壊機構がこれを行うから式 (2.3.24) のような変形によって結果が大きく変化するようであれば $[w_0, w_N]$ の選定をし直す必要がある。

式 (2.3.20) 右辺第 1 項における総和計算及び $A(i, j, l)$ における積分計算の難易は粒度の分割法によって左右され, 比較的やっかいな論理計算が必要となることもあるが例えば

$$w_i = 2 w_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.3.26)$$

のような区分ではすっきりした形となる。すなわちこの場合の積分総和計算は

$$\frac{1}{2} \sum_{I_\ell} \iint_{A(i, j, \ell)} dw' dw'' = \sum_{i=1}^{\ell-1} \int_{w_{i-1}}^{w_i} dw' \int_{w_{\ell-1}}^{w_\ell - w'} dw'' + \sum_{i=1}^{\ell-2} \int_{w_{i-1}}^{w_i} dw' \int_{w_{\ell-1} - w'}^{w_{\ell-1}} dw'' + \frac{1}{2} \int_{w_{\ell-1} - w'}^{w_{\ell-1}} dw' \int_{w_{\ell-2}}^{w_{\ell-1}} dw''$$

(2.3.27)

となり，各積分区分領域を w' ， w'' 軸に平行な 2 辺をもつ三角形，及び四角形とすることができるからである。(図 2.3.3(b)) また $K(w', w'')$ の形状は多くの場合

$$K(w', w'') = \sum_p K_p w'^{m_{1p}} w''^{m_{2p}} \quad (2.3.28)$$

のような w' ， w'' に関する多項式となるから式 (2.3.20) 右辺，あるいは式 (2.3.27) 右辺の積分にあたっては四角形領域では解析的に求めることができるし，その他の場合においても例えば三角形の場合では $a_1 \sim a_6$ を任意の定数として

$$I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \int_{a_1}^{a_2} dw' \int_{a_3 - w'}^{a_4} w'^{a_5} w''^{a_6} dw''$$

(2.3.29)

を求めるサブルーチンを用意しておきこれを ρ について加え合わせればよい。以上は凝集係数に関する議論であったが，破壊関数の場合も後に述べるような巾乗型を採用する場合にはまったく同様の方法によって取り扱うことができる。

2.3.4 解析解との比較

ここでは前述したシミュレーション手法の予備的な検討として凝集係数，破

表 2.3.4 凝集・破壊過程の解析解

№	凝集・破壊関数	無次元化粒度分布 $w_0/N_0 \bar{n}(w)$	無次元化時間 T	粒子数 N/N_0
1	K_1	$\frac{4}{(T+2)^2} \exp\left(-\frac{2\bar{w}}{T+2}\right)$	$N_0 K_1 t$	$\frac{2}{T+2}$
2	$K_2(w+\bar{w})$	$\frac{(1-T)}{\bar{w} T^{1/2}} \exp\left[-(1+T)\bar{w}\right] I_1(2\bar{w} T^{1/2})$	$1 - \exp(-K_2 N_0 w_0 t)$	$1 - T$
3	$a_2 w^{a_1} \bar{w}^{b_n - a_1}$	$\Gamma\left(\frac{a_1}{n}\right)^{-1} \left[\bar{n}(w, 0) \Gamma\left(\frac{a_1}{b_n}, T \bar{w}^{b_n}\right) - b_n T^{\frac{a_1}{b_n}} \bar{w}^{a_1-1} \exp(-T \bar{w}^{b_n}) \int_0^{\bar{w}} \bar{n}(\bar{w}, 0) \bar{w} d\bar{w} \right]$	$a_2 w_0^{b_n} t$	

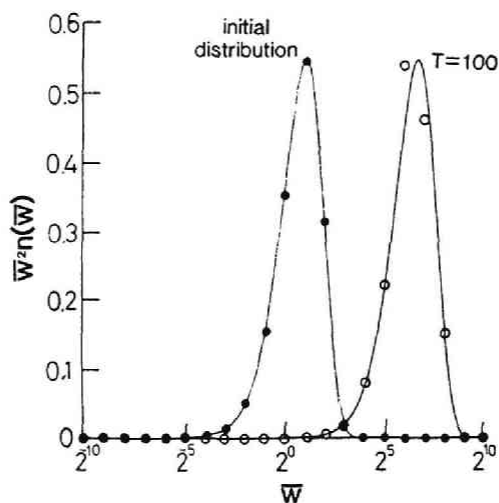
$$\bar{w} = w/w_0, \quad \bar{n}(\bar{w}, 0) = \frac{N_0}{w_0} e^{-\bar{w}}, \quad \text{№3 は } 0 < a_1/b_n < 1 \text{ の時}$$

№3 では w'' の粒子が w の粒子に破壊する。

壊関数が簡単な型をしている時に得られる解析解とそれに対する計算解を比較する。表 2.3.4 は比較に使用した解析解を示し凝集係数が定数，線型，の場合，及び破壊関数が巾乗型の場合である。図 2.3.4(a)～(c) はこれらの解と計算解との比較を示すもので横軸に w を初期平均粒子質量 w_0 で割って無次元化した $\bar{w} = w/w_0$ の対数を，また縦軸には無次元化質量分布 $w/N_0 n(w)$ に \bar{w} を乗じた量を示している。これは図上で $[\bar{w}, \bar{w} + d\bar{w}]$ の区間の粒子質量が占める面積 $w/N_0 \bar{w} n(w) d(\ln \bar{w})$ が粒子の全質量に占める割合 $w n(w) dw / (w_0 N_0)$ に比例する表示であり粒度間の粒子水質濃度の配分を理解するのに都合よい。図 2.3.4(a), (b) は凝集作用が存在する時の例を示したもので計算に使用した区分は 2 を底とする等比級数によって粒度軸を 2 1 領域に切断したものである。いずれの場合も初期分布としては

$$n(w) = e^{-\bar{w}} \quad (2.3.30)$$

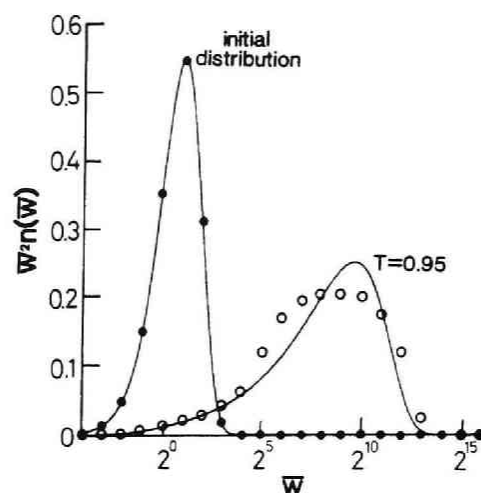
を採用した。解析解と数値解の比較では (1)数値解の方が粒子の成長が抑えられがちであること，(2)分布形状がやや偏平となることなどが見られる。これらの傾向は他の時刻においても同様な状況が見られた。(1)に関しては図 2.3.5 に示す粒子数変化においても数値解の変化率が小さめになることによって示され



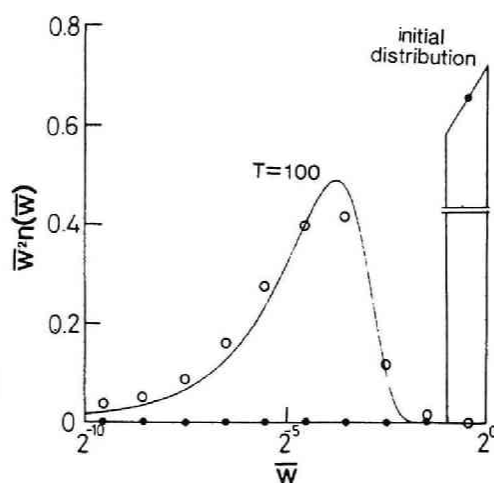
(a) 凝集係数一定， $T=100$

図 2.3.4 粒度分布の変化

- ：初期分布
- ：計算値
- 実線：解析解



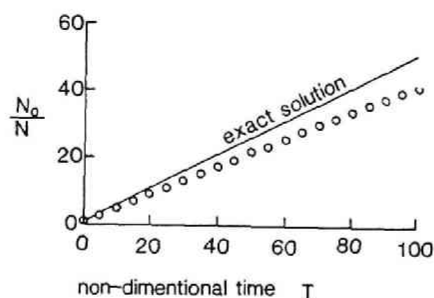
(b) 線型凝集係数, $T = 0.95$



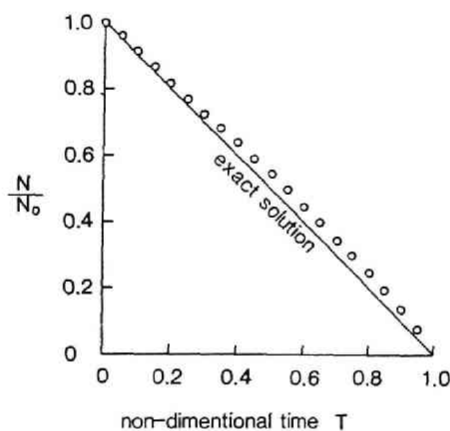
(c) 巾乗型破壊関数, $T = 100$

$$a_1 = 1, \quad b_n = 2$$

ている。こうした誤差の原因としては(1)対象とする粒度範囲を制限したこと、(2)区分内の粒度分布形状を $n(w) \propto w^{-1}$ の形に強制していること、が掲げられるがそれらの要因がどのようなメカニズムによって誤差を生じさせているかは明らかではない。いっぽう粒子全質量に関しては計算式では正確に保存される形となっており、誤差は数値積分、時間積分に関する部分のみに由来する。これに対し、本研究ではそれぞれ適応型シンプソン法、及び Gear 法に基づいた可変次数可変幅による常微分方程式解法を用いているがその誤差は本比較計算のみならず本研究で行なった他の計算を通じて 0.1% を越すことはなかった。



(a) 凝集係数一定



(b) 線型凝集係数

図 2.3.5 粒子個数の変化

いっぽう図 2.3.4(c)は破壊作用のみが存在する場合の粒度分布変化を示したものであり初期分布型を

$$\frac{w}{N_0} n(w) = \begin{cases} 2 + \sqrt{2} & w_0 > w \geq \frac{w_0}{2} \\ 0 & \frac{w_0}{\sqrt{2}} \geq w \end{cases} \quad (2.3.31)$$

と仮定し，破壊関数を w の巾乗型として計算を行なった場合である。粒度の区分は $\sqrt{2}$ を底とする等比級数によったが，この場合においても数値解は解析解に比べやや偏平となる傾向を示している。

さて以上が数値解・解析解の比較による本数値シミュレーション法の予備的検討であるがこれらをまとめると次のようになる。

- (1)数値解析により算出された粒度分布の形状は解析解にほぼ一致した。
- (2)質量保存則は満足される。一方、粒子数の変化の追跡はそれほど正確に行なわれてはいないが実用上の精度は確保されていると考えてよい。

2.3.5 凝集性浮遊粒子の経時変化に関する実験

本研究では凝集性をもつ浮遊粒子の特性把握、及び数値シミュレーション検証データ取得の目的をもって硫酸アルミニウムによる濁質のフロック形成実験をおこなった。形成場としては、図 2.3.6 に示すようなアクリル樹脂製容量

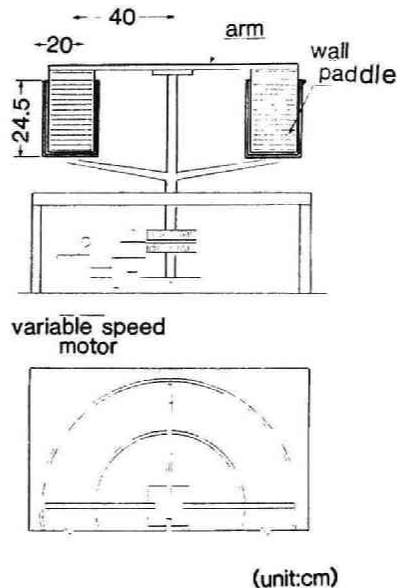


図 2.3.6 実験水槽

110 ℓ の円筒型回転水槽を使用し、固定された 4 枚の攪拌翼（パドル）を挿入することによって槽内混合を行なっている。回転速度は 3 ～ 20 rpm 程度の範囲であり混合特性時間も同程度のスケールであると考えられるから本実験で対象としたフロック形成時間スケール（5 ～ 30 分程度）に較べかなり小さい。また

フロック形成は以下の要領によって行なった。

(1) 水槽に 101 ℓ の水道水を満たし濁質として気泡をよく除去し水に馴らしたカオリン，あるいは自然湖沼底泥，及び pH 調整剤を注入する。濁質量は混合後濃度が 30 mg / ℓ (湖泥の場合は 5.6 mg / ℓ) になるように，また pH 調整剤は薬注後の pH が 6.5 になるように水酸化ナトリウムを注入した。注入後は槽を急速に回転することによって十分な攪拌をおこなった。

(2) 凝集剤として硫酸アルミニウム (半井化学 (株) 製，一級) を槽内に一樣になるように注入する。この際の槽回転速度は 20 rpm ($G = 114$) とし，注入後 2 分間にわたってこの速度の回転を続けた後に指定の攪拌速度に直す。また湖泥実験の場合には凝集助剤としてアルギン酸ナトリウム 2 mg / ℓ も注入している。

(3) 形成途中のフロック粒度，密度などの特性量を観測する。フロックの特性としては (1) 粒度分布，(2) 密度関数，(3) 衝突合一確率，(4) 強度特性を挙げそれぞれの測定を行なった。また，その他に予備的な検討として槽内のエネルギー逸散率と回転数の関係の計測を行なっている。

(1) エネルギー逸散率と回転数の関係

流体乱れによるエネルギー逸散率が凝集・破壊特性を規定する重要なパラメータであることは表 2.3.1 における乱流凝集係数を見ても明らかである。Camp ら¹³¹⁾ は Smoluchowski によって検討された速度勾配下の凝集作用を乱流場に拡張適用し "平均速度勾配 (mean temporal velocity gradient) G " なるパラメータを導入したが，この G とエネルギー逸散率 ϵ とは次式によって関連付けられる。

$$G = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} \quad (2.3.32)$$

さて，槽内のエネルギー逸散は攪拌翼から流体に与えたエネルギーを粘性作用によって熱に変換することによって生ずるが，そのほとんどは流体乱れを経て行なわれるものであり平均流速場から直接，熱に逸散する量は小さいと仮定すれば，その量は乱れ測定によっても，また攪拌に費やしたエネルギー量測定によっても計測できる。実際，攪拌槽などで両者の方法によって ϵ を比較測定

した例¹³²⁾などでもほぼ同オーダーの値が報告されている。したがって本研究においてもこの両者による計測を行なった。

(i) 乱れ計測による方法

局所等方性近似及び Taylor の凍結乱流仮定を用いるならば、エネルギー逸散率の時間的平均量 ε_1 は

$$\varepsilon_1 = 15 \frac{\nu}{\bar{U}^2} \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)^2 \quad (2.3.33)$$

と記すことができる。ここに \bar{U} は平均流速, ν は動粘性係数, u は流れ方向の乱れ速度である。本測定では式 (2.3.33) を使用しホットフィルム流速計を用い離散化時間 0.0016 秒, 平均化時間は 40 秒とした計測を行なった。

(ii) 消費エネルギーによる方法

消費エネルギーによるものでは通常動力側にトルクメータを付着する方法が用いられるが, 本実験では水槽自体を回転するため機械的摩擦などの消費が大きく適当ではない。したがって, ここでは逆に攪拌翼をワイヤによって釣りそれを静止するのに必要な力 F からこれを計算している。

$$\varepsilon_2 = \frac{2 \pi R \sum F_i r_i}{\rho V} \quad (2.3.34)$$

ここに F_i は回転抑止力, r_i はその腕長であり, R は回転数, V は槽容積である。

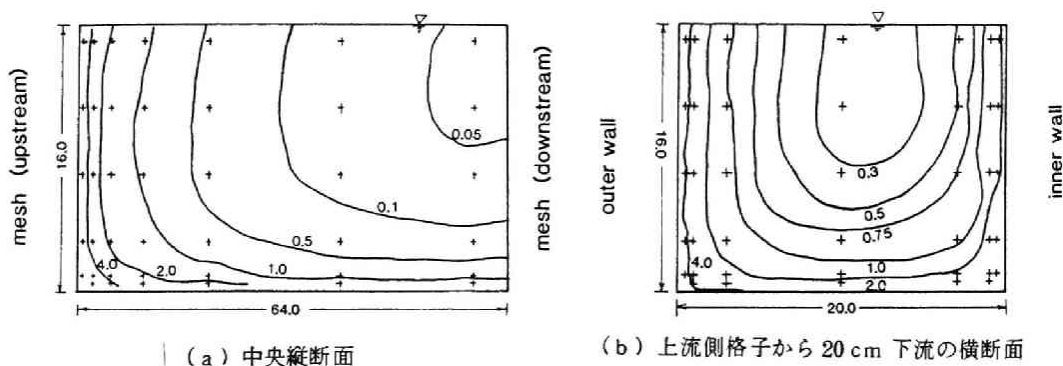


図 2.3.7 エネルギー逸散率の測定
コンターの単位は cm^2/s^3 , + は測定位置
槽次元の単位は cm , $R = 4.62 \text{ rpm}$

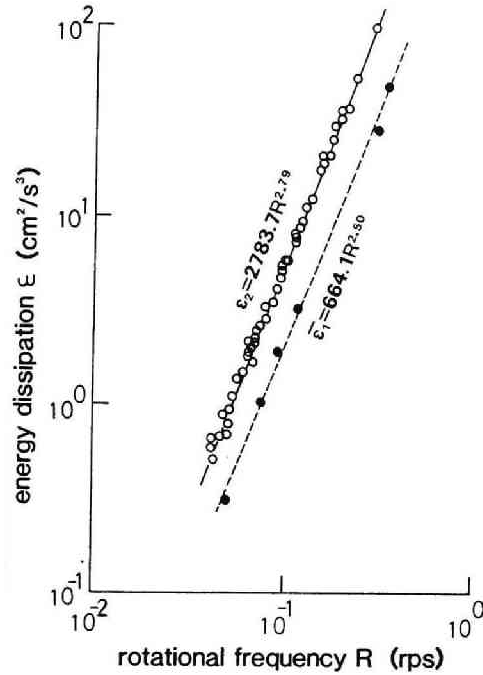


図 2.3.8 エネルギー逸散率と回転数

図 2.3.7 は (i) の方法によって測定された ϵ_1 の分布図であり槽全体の値としてはこれらを測定，体積による重み付き平均し $\bar{\epsilon}_1$ とした。図 2.3.8 は $\bar{\epsilon}_1$ ， ϵ_2 を回転数に対してプロットしたものであるが， $\bar{\epsilon}_1$ の方が ϵ_2 に較べ $1/3 \sim 1/2$ 程度低めに計測されまた回転数との傾きもやや低めに観測されていることがわかる。これは乱れ計測が攪拌翼，槽壁面付近のエネルギー逸散率の急激な変化を追いきれていないためであると考えられるが，こうした ϵ の空間的な分布がフロック形成に大きな影響を及ぼすことは想像に難くない。いま空間的な平均が ϵ_0 でありエネルギー逸散率 ϵ をもつ空間的割合が $f(x')$ ($x' = \epsilon / \epsilon_0$) であるような槽の ϵ の空間的分布を考慮した有効 G 値 (G_*) は

$$G_* = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\nu}} \int_0^\infty \sqrt{x'} f(x') dx' \quad (2.3.35)$$

となる。但し $f(x')$ は次の条件を満たすものとする。

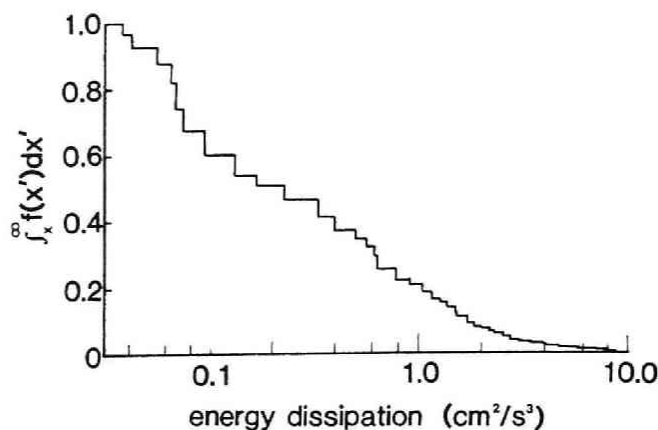


図 2.3.9 エネルギー逸散率の空間分布
 $R = 4.62 \text{ rpm}$

$$\int_0^{\infty} f(x') dx' = \int_0^{\infty} x' f(x') dx' = 1 \quad (2.3.36)$$

$f(x')$ の形状は槽の状況によって異なるが例えば図 2.3.7 に対応する図 2.3.9 によってこれを近似し式 (2.3.35) で示される有効 G 値と槽平均 G 値の比 $\int_0^{\infty} \sqrt{x'} f(x') dx'$ を計算してみると 78.7% を得る。他の回転数におけるこの値は 74.9 ~ 83.4% の範囲となっており場の不均質性によって G 値に対し 20% 程度の割引きをおこなわなければならない。

以上の議論は ϵ のマクロ的な変動に基づく割引きであるが、その他ミクロ的なゆらぎも誤差を生じる原因となる。栗谷ら¹³³⁾ は $\partial u / \partial x$ に関する正規分布仮定のもとで 15% 程度の割引きをおこなう必要を述べており、以上を合わせればエネルギー投入量の $(0.68)^2$ 倍が有効 ϵ 値となることになる。したがって以下では (ii) の方法によって算出した G 値を公称 G 値とし、凝集に関してはこれに 0.68 を乗じた値を使用した。エネルギー逸散率の分布は破壊作用に対しても大きく影響するが、これに関しては第 2.3.7 節で別途検討している。

(2) 粒度分布

粒度分布の測定は主として水槽内粒子を直接写真撮影することによって行なっている。使用した写真機は一眼レフアサヒペンタックス SP 及びアサヒペンタックス LX にそれぞれ接写リング、オートベローズを装着したものであり、

ほぼ 50 μm 程度の粒子までを読み取ることができる。またそれ以下の粒子についてはフロックを破壊しないように注意しながら採水し、大フロックを沈降除去した後の検水について顕微鏡撮影をおこなった。使用した顕微鏡はオリンパス L であり位相差レンズによって明暗視野の逆転をおこなっている。この方法によってほぼ 5 μm 程度の粒子までを読み取った。また同時に、あるいは同一条件下でアンドレアゼンピペット型の沈降筒によって沈降法による粒度分析を併用し上記写真読み取りデータのチェックに使用した。粒子の読み取りは比較的鮮明に写っているフロックの 2 軸平均径によっておこない、各粒度分布毎に大粒径側、小粒径側共に 50~100 個程度を読み取っている。

(3) フロック密度

フロックの密度はガラス製矩型の沈降筒を用いて沈降速度及び粒径を計測しストークス則を仮定して算出した。

$$\rho_e = \frac{18 \mu v}{g d^2} \quad (2.3.37)$$

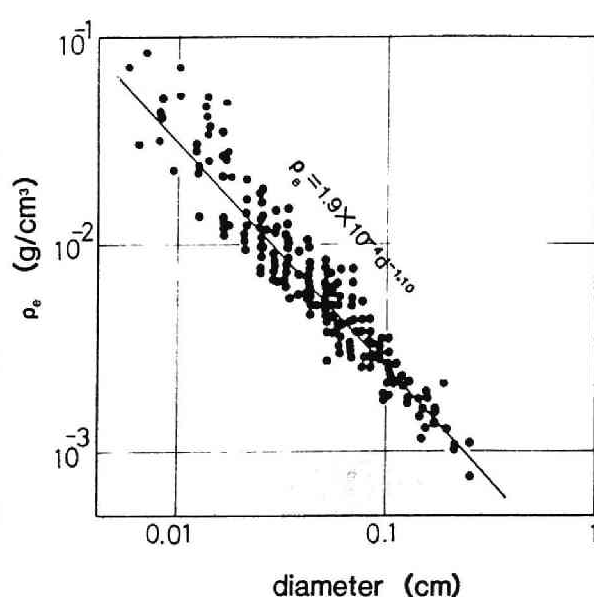


図 2.3.10 密度関数の例

カオリン：30mg/ℓ， Al：3.16mg/ℓ
 攪拌時間：90~120分 G値：14.74

ここに ρ_e は有効密度, v は沈降速度, g は重力加速度, d はフロック直径, μ は粘性係数である。粒径, 沈降速度の測定は粒度分布と同じくアサヒペンタックスカメラ L X, 及びオリンパス L 顕微鏡を用い視野内に設定された 2 本の基準線間を降下する時間とその粒子の撮影写真の計測によって行なっている。図 2. 3.10 は得られた ρ_e を d との関係でプロットした例であり, 密度関数 (式 (2. 3.10)) によって近似した直線を図中に併記する。密度は粒径の他に薬注量, 攪拌条件, 攪拌経過時間などによっても変化する。したがって本実験ではフロック形成中の各時刻においてこれを計測しその追跡をはかった。たとえば, 図 2. 3.11 は, カオリン $30 \text{ mg}/\ell$, Al $3.16 \text{ mg}/\ell$ における密度関数のパラメータ a 及び K_ρ の経時変化を示しているが, フロック形成が進むにつれて a 値は大きく K_ρ 値は小さくなっている。同様の傾向は他の薬注量についても同じように観測されている。

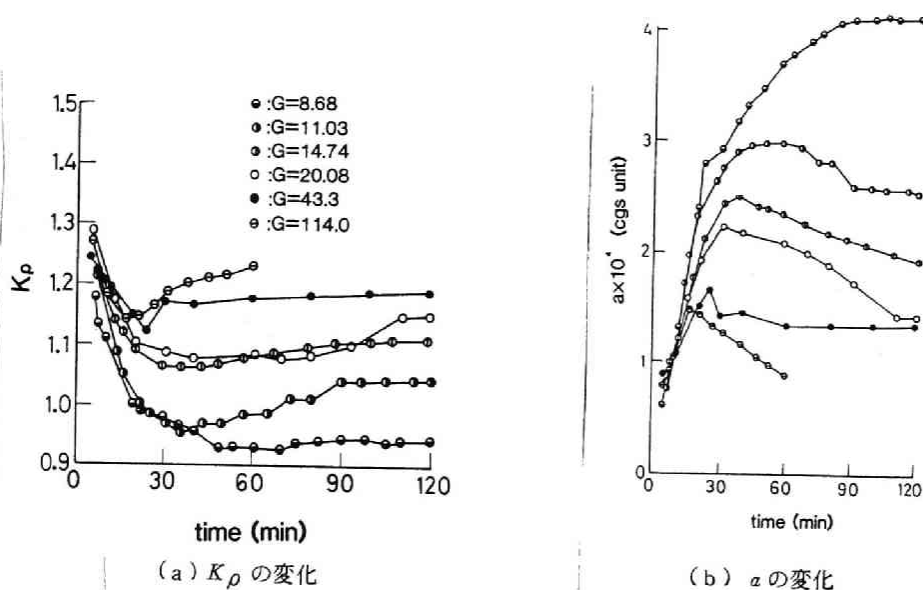


図 2. 3.11 密度関数の変化例

カオリン: $30 \text{ mg}/\ell$, Al: $3.16 \text{ mg}/\ell$

(4) 衝突合一確率

凝集係数の導出にあたっては通常、粒子が相手粒子に接近しても、その粒子があたかも存在していないかのように運動して衝突することを仮想しているが、実際には流体力学的相互作用が働き、衝突が回避されることも多くなり、また衝突しても粒子同志が互いに不安定でなければ効果的な結合は望めない。したがってこれらの効果を総合的に考慮した衝突合一確率 α の導入が不可欠となるがこれは粒径比、形成の履歴などによって複雑な様相を示す。したがって粒子の動力学を記述する立場からはこれに対する何らかの情報を得なければならないが、本研究においては次式で近似的に記述されるフロックによる微小粒子の除去速度を測定し、式中にあらわれる微小粒子対フロックの衝突合一確率の $\bar{\alpha}$ の性状把握に努めた。

$$\frac{d n_p}{d t} = - 0.55 \bar{\alpha} G n_p V_f \quad (2.3.38)$$

ここに n_p は微小粒子密度、 V_f はフロック体積である。式(2.3.38)は凝集作用による粒子数変化の式(2.3.2)にて微小粒度領域では①式(2.3.2)右辺第2項が卓越すること、②乱流凝集が卓越すること、③衝突半径は大粒子半径によって近似されること、④微小粒子同志の凝集は大粒子とのそれに較べて無視できることを前提として式(2.3.54)を使い導出されたものである。式(2.3.38)に対応する実験としては以下の手順によって微小粒子の減少速度を測定し α の推定を行なっている。

(Ⅰ) 所定の G 値、薬注量でフロックを形成する。

(Ⅱ) フロック形成を所定時間おこなった後、カオリンによる高濃度濁水を槽内に一樣になるように加え攪拌を継続する。

(Ⅲ) 濁質注入時を時刻0とし以下所定の時間間隔で採水をおこなう。採水にはフロックを破壊しないように注意してアンドレアゼンピペット型の沈降筒によって行なう。

(Ⅳ) 沈降筒を静置した後に上澄みから採水をおこないその濁度をもって n_p に代替する。

(Ⅴ) n_p の経時変化から $d \ln(n_p) / d t$ あるいは α を推定する。

図2.3.12は上記の方法によって推定された $d \ln(n_p) / d t$ の経時変化を

示したものである。図 2.3.12 に示す最初の立上がりはフロック体積 V_f の急増によるものである。

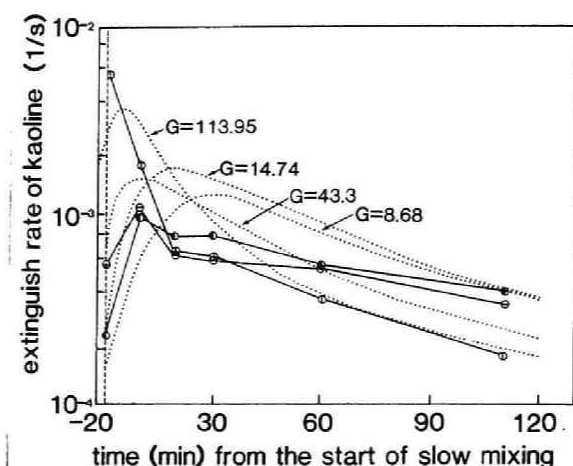


図 2.3.12 微小粒子減少の速度例

カオリン：30mg/l， Al：3.16mg/l

○：G = 113.95， □：G = 43.3， ●：G = 14.74

点線は第 2.3.9 節で述べる数値シミュレーションから求めたものである。

(5) フロック破壊強度

フロックの凝集力，あるいは破壊強度に関する実験は最近，多くの研究者によって行なわれており，また種々の方法が考えられているが（表 2.3.5），本研究においてはこれを速度論的に取り扱う観点から形成中のフロックに攪拌強度の変化を与え，その時の粒度分布の時間的变化を追跡することによって同定した。破壊実験は次の手順によって行なっている。

(i) 所定の G 値，薬注量でフロックを形成する。

(ii) フロック形成を所定時間おこなった後，凝集作用を抑制するために水道水によって 3 倍に希釈する。

(iii) 希釈後の粒度分布及び密度関数を写真撮影によって求める。

(iv) 攪拌強度を増加し以後，所定の時間間隔で粒度分布の変化を求める。

粒度分布の変化から破壊関数を求めるのには次の手順によって行なった。

(i) 破壊関数型を表 2.3.2 の 1 つとし破壊卓越場において成立する次の式 (2.3.39) を第 2.3.3 節で述べた部分分割法によって解く。

表 2.3.5 フロック破壊実験の一覧

研究者	方法	備 考
Glasgow (1977) ¹³⁴⁾ 平井 (1979) ¹³⁵⁾ Pandya ら (1982) ¹³⁶⁾	攪拌強度急変法	攪拌槽の攪拌強度を急増させ粒度分布の変化等を追跡する。
Smith (1978) ¹³⁷⁾ Boadway (1978) ¹³⁸⁾	攪拌強度急変法 (2重円筒水槽)	上の方法と同一であるが2重円筒水槽で行なうため槽内の速度勾配を一定にできる。
Ludwig ら (1967) ¹³⁹⁾ 松尾ら (1981) ¹⁴⁰⁾	破壊管路法	形成槽から管路によってフロックを流出させ、管路内のせん断力、乱れによって破壊を行なう。
Quigley ら (1977) ¹⁴¹⁾	4ローラー装置	Taylor ¹⁴³⁾ の4ローラー装置 (four roller apparatus) を用いて個々のフロックの破壊を観察する。
Glasgow ら (1982) ¹⁴²⁾	ジェットによる破壊	ジェット内にフロックを落し破壊を観察する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial t} &= \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{B_r} \\
 &= -P_b(w) \cdot n(w) + \int_w^\infty \frac{w'}{w} N(w') \cdot P_b(w') \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') dw'
 \end{aligned}
 \tag{2.3.39}$$

但し初期粒度分布としては観測したそれを用い、密度関数は時間的に一定であると仮定した。

(ii) 次の式(2.3.40)で定義される Φ を適合基準としてこれを最小にする破壊関数の係数値を求める。

$$\Phi = \left[\frac{1}{\sum \text{総和数}} \sum \text{各実験} \sum \text{各観測時} \sum_{i=1}^N \frac{\{M_{cal}(w_i) - M_{obs}(w_i)\}^2}{M_{cal}(w_i)} \right]^{1/2}
 \tag{2.3.40}$$

但し

$$M(w_i) = \int_0^{w_i} w n(w) dw
 \tag{2.3.41}$$

であり添字 *obs* は観測値を、*cal* は計算値を表わす。計算ではまず破碎関数 $G(w, w')$ に関する係数 m 、及び選択関数の b_n を固定し、 α_2 のみを一次元探索法によって推定する。 α_2 は時間スケールを定めるパラメータであるから粒度分布の計算経時変化を計算ステップ毎に記憶しておけば1回の積分計算から数多くの探索点をとることができる。探索打ち切りは α_2 の相対移動が1%以下になった時点とした。

(iii) 破壊関数に関する他のパラメータを変化させ ϕ が最小となる点を探す。探索はパラメータ平面に探索格子点を配し点上の ϕ を算出することによって行なった。図 2.3.13 (a) にその1例を示す。

(iv) (iii)の方法で求めた各破壊関数の最小の ϕ を比較し、最小となる関

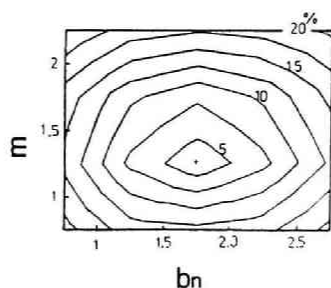


図 2.3.13 (a) 破壊関数パラメータの同定

カオリン 30mg/l, Al : 3.16mg/l

破碎関数 $(w/w')^m$ の場合

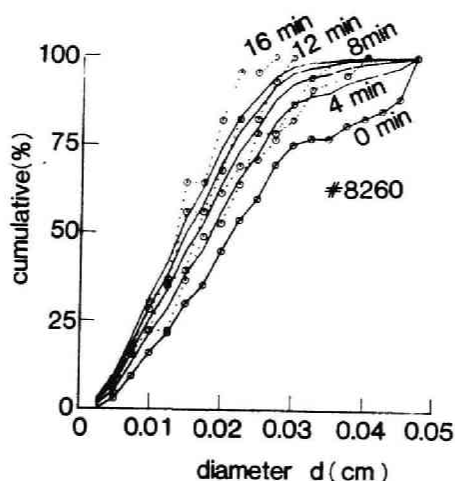


図 2.3.13 (b) 破壊過程のシミュレーション例

カオリン : 30mg/l, Al : 3.16mg/l,

G 値 : 29.0, 点線 : 実測値, 実線 : シミュレーション値

数型を採用する。

表 2.3.2 は以上の手順によって得られた結果でありこれによれば巾乗型の破壊関数をもっとも良好な成績をあげていることになる。図 2.3.13 (b) にこのようにして定めた破壊関数によって検定実験を予測した例を示す。

2.3.6 凝集係数

凝集係数については表 2.3.1 に示したように従来からよく研究されており衝突合一確率に不明な点を残すものの、 G 値あるいは粒径に対する依存性自体は広く容認されていると言ってよい。しかるに、それらの導出過程、あるいは適用範囲などに関しては疑問点も多く必ずしも完成されたものではない。凝集係数に関する研究は1917年の Smoluchowski¹⁰⁵⁾ による層流単純せん断場における計算に始まるが、Camp・Stein¹³¹⁾ はこれを乱流場に拡張し粒径 d_1 と d_2 の粒子の凝集係数として次式を提唱した。

$$K(d_1, d_2) = \frac{4}{3} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^3 G \quad (2.3.42)$$

この式は Smoluchowski のそれに平均速度勾配として $G = (\epsilon/\nu)^{1/2}$ を代入し得られたものであり、この拡張使用についてはしばしば問題とされ、他の式型を求める努力もなされた^{146), 147)}。しかるに式 (2.3.42) はそれらの批判のごとく乱流に対して根拠がまったくないわけではない。壁面、攪拌翼付近を除けば凝集粒子形成場の大部分では局所等方性が成立すると考えられ¹⁴⁸⁾ そこでは ϵ と平均速度勾配は容易に関連付けられるからである。均質乱流においては ϵ と平均速度勾配には次の関係がある。

$$\epsilon = \nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right)^2 \quad (2.3.43)$$

ここに u_i ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ x_1, x_2, x_3 方向の乱れ速度である。Smoluchowski の凝集機構では単純せん断による衝突のみを考えそれ以外は考慮しないから式 (2.3.43) 右辺において $i \neq j$ の成分のみが衝突原因として取り扱われる。さらに等方性乱流では

$$\nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right)^2 = \begin{cases} \frac{2}{15} \epsilon, & i \neq j \\ \frac{1}{15} \epsilon, & i = j \end{cases} \quad (2.3.44)$$

が成立するから、単純せん断を通して消費されるエネルギーは $6/7.5 \epsilon$ であり、したがって速度勾配の絶対値の平均としては例えば速度勾配の分布が正規分布にしたがうとして、

$$G' = \sqrt{2} \left(\frac{6}{7.5} \cdot \frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2} = 1.26 \left(\frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2} \quad (2.3.45)$$

なる G' 値を G 値の替わりに使用すればよい。

しかしこうした議論は衝突原因を単純せん断のみに求める点に大きな欠点があり、また流体の連続性条件から生ずる制約なども考慮されていない。さらに粒子近辺の流れを一樣なせん断場と考えることなどの問題点もある。

いっぽう Saffman ら¹⁴⁹⁾ は考察の対象をミクロスケール以下の粒子にしばらく等方性乱流理論に基づいた計算をおこなった。彼らの考察は粒子慣性力及び重力を考慮するか否かによって2通りに分かれるが、それらを考慮しない場合には、

$$K(d_1, d_2) = 1.30 \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^3 \left(\frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2} \quad (2.3.46)$$

となり、また慣性力・重力を考慮する場合には

$$K(d_1, d_2) = \sqrt{8\pi} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e} \right)^2 (\tau_1 - \tau_2)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{Du_t}{Dt} \right)^2 + \frac{1}{3} g^2 \right\} + \frac{1}{9} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon}{\nu} \right]^{1/2} \quad (2.3.47)$$

となる。ここに τ_1, τ_2 は粒子の緩和時間であり

$$\tau_i = \frac{d_i^2 \rho_f}{18 \mu} \quad (2.3.48)$$

である。 ρ_f は粒子の見かけ密度を、 $(\overline{Du_l}/Dt)^2$ は媒体の平均 2 乗加速度を表わす。Saffman らが導出した式 (2.3.47) は ρ_f が粒径によって変化しない場合であったが、フロックなどではこの仮定は正しくない。したがってこれを考慮し式 (2.3.47) に相当する式を導出してみると若干の計算の後、

$$K(d_1, d_2) = \sqrt{8\pi} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{18\mu} \right)^2 \cdot (\rho_{e1} d_1^2 - \rho_{e2} d_2^2)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\overline{Du_l}}{Dt} \right)^2 + \frac{1}{3} g^2 \right\} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon}{\nu} \right]^{1/2} \quad (2.3.49)$$

を得る。ここに ρ_e は密度関数である。式 (2.3.49) 右辺の〔 〕内はそれぞれ (1) 慣性力による乱流加速度の差, (2) 重力沈降差, (3) 流体内部速度変動による衝突効果を示し、例えば $(\overline{Du_l}/Dt)^2$ に Bachelor¹⁵⁰⁾ による $1.3\nu^{-1/2}\epsilon^{3/2}$ を、密度関数のパラメータ a , K_ρ にカオリン・バンドフロックの概略値である 10^{-4} , 1.0 (cgs 単位) を代入しそれらの比を図示すると図

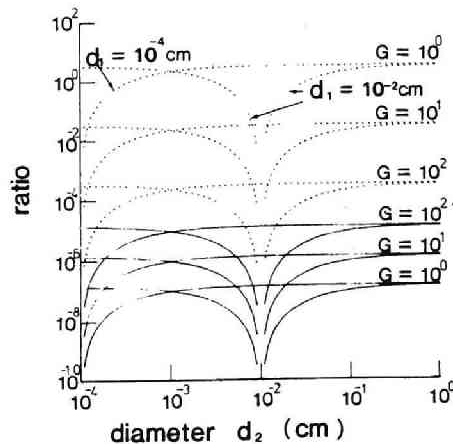


図 2.3.14 式 (2.3.49) を用いた時の凝集係数の各効果の比較。

実線は慣性効果/速度変動を、点線は重力効果/速度変動の効果を示す。密度関数は式 (2.3.10) を用い $a = 10^{-4}$, $K_\rho = -1$ (cgs 単位) とした。 ρ_e は 1.6 g/cm^3 を越えないものとしている。

2.3.14のようになる。これより明らかなように本研究で対象とした G 値が1以上の流れでは速度変動効果が卓越することになり，それぞれ独自の効果を比較した図2.3.1と一致した結果を得る。

以上はSaffmanらの用いた仮定にしたがって凝集係数の検討を行なったものであるが，これには次の欠点がある。まずその第1は粒径が乱れのミクロスケールに比べはるかに小さくなければならないことである。ミクロスケール η と G 値は $\eta = (\nu/G)^{1/2}$ の関係をもち G 値が10~100にて0.1~0.3 mmのオーダーとなる。したがって水中のフロック衝突に式(2.3.46)を適用するとき，その範囲は小粒子側に限定される。第2の問題点は解析を準静的に行なっているために粒子の緩和時間 τ を乱れのミクロ時間スケール $1/G$ 以下に制限しなければならないことである。この点はEastら¹⁵¹⁾，あるいはPanchev¹⁵²⁾が行なっている計算に対しても同様にあてはまる。また，反対の場合としてAbrahamson¹⁵³⁾は τ が乱れのマクロ時間スケールよりも大きい時の凝集係数を求めている。しかし水中粒子，特にフロックに関してはこの問題はそれほど重要ではない。流体運動とのズレによる衝突効果は図2.3.14を見てもわかるように極めて小さく上記の問題点が，この結果をまったく変えてしまうとは考えられないからである。

Levich¹⁵⁴⁾は乱流凝集を被衝突粒子に対する拡散吸着問題として定式化しSaffmanらの解，式(2.3.46)と同様な結果を得ているが，これはSaffmanらの解析の表現を替え簡略化したものであって上記の問題点はそのまま残る。

以上が，従来より報告されている乱流凝集係数とその水中粒子，特にフロックへの適用に対する検討であったがいずれも粒子径をミクロスケール以下に制限しなければならないことが問題点として指摘された。そこで，以下ではこの点に対してさらに検討を加える。

いま粒子が流体中にまったくランダムに分布し，流れに完全に追従すると仮定すれば，凝集係数は衝突半径内に流入してくる粒子の速度 u から

$$K(d_1, d_2) = \int_S ds \int_0^\infty du \, u \, Pr(u) \quad (2.3.50)$$

と表わすことができる。ここに $Pr(u)$ は u の確率密度， S は直径 $(d_1 + d_2)$ の球面である。 u は被衝突粒子からみた衝突粒子の縦方向相対速度であるから

その挙動は縦方向速度構造関数 $D_l(r)$ によって記述される。Kolmogoroff¹⁵⁵⁾によれば $D_l(r)$ は次のように表わされる。

$$D_l(r) = \bar{u}^2 = \begin{cases} D_\nu \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right) r^2, & r \ll \eta \\ D_\varepsilon \frac{\varepsilon^{2/3}}{\varepsilon^{2/3}} r^{2/3}, & r \gg \eta \end{cases} \quad (2.3.51)$$

ここに r は地点間のずらし長さであり今の場合、衝突半径 $(d_1 + d_2)/2$ である。いま $P_r(u)$ を平均値 0, 分散 u^2 の正規分布によって近似すれば

$$\int_0^\infty u P_r(u) du = \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right)^{1/2} \quad (2.3.52)$$

であるから

$$K(d_1, d_2) = \frac{4}{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 D_l^{1/2} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right) \quad (2.3.53)$$

となる。したがってこれに式 (2.3.51) を代入し D_ν , D_ε にそれぞれ $1/15$,

2.12 (縦方向速度構造関数歪度因子を $0.26^{156)}$ と仮定し Kolmogoroff のモデルによって算出した値) と仮定すれば, 式 (2.3.50) に対応する凝集係数としてはそれぞれ

$$K(d_1, d_2) = \begin{cases} 2.29 \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^3 \cdot \frac{d_1 + d_2}{2} \ll \eta & (2.3.54) \\ 12.94 \varepsilon^{1/3} \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{d_1 + d_2}{2} \gg \eta & (2.3.55) \end{cases}$$

となる。遷移領域における挙動を明らかにする必要があるが, たとえば Batchelor¹⁵⁰⁾ による次の内挿式を用いることにすれば

$$D_l(r) = (\varepsilon \nu)^{1/2} \frac{r'^2}{15 [1 + (15 D_\varepsilon)^{-3/2} r'^2]^{2/3}} \quad (2.3.56)$$

$$r' = r / \eta \quad (2.3.57)$$

凝集係数 $K(d_1, d_2)$ としては次のようになる。

$$K(d_1, d_2) = \frac{4\pi}{\sqrt{30}} (\varepsilon\nu)^{1/4} \frac{(d')^3}{[1 + 0.00558 d'^2]^{1/3}} \quad (2.3.58)$$

但し

$$d' = \frac{(d_1 + d_2)}{2\eta} \quad (2.3.59)$$

すなわち衝突半径が η を越すにつれて、粘性領域解、式 (2.3.54) に $(1 + 0.00558 d'^2)^{-1/3}$ の修正係数がかかってくる。水中フロックは成長に応じてミクロスケールの10倍程度になるから、この時の修正係数は0.863程度となりそれ程重要なものではない。いっぽう式 (2.3.54) を Saffman らの解と比較してみると ε, d' などに対する依存性はまったく同一であるが比例係数が異なっている。しかるに彼らの行った計算をたどってみるとその係数は本検討のそれと同じく $4\pi/\sqrt{30} = 2.29$ となり彼らの係数が誤りであることがわかる。以上の検討により、本研究における凝集係数としては式 (2.3.58) を採用する。

2.3.7 浮遊性粒子の強度・破壊

凝集性粒子のうちフロックとは粒子間の結合状態がもっともゆるやかなものの名称であることは既に述べたが、それゆえに流体力学的な外力に対する耐性もきわめて低い。水処理操作でもフロック強度の低下がフロック粒度の減少をもたらす沈降特性・汙過特性などの劣化原因となることはしばしば述べられてきた。すなわちフロック強度、ひいては水中凝集性浮遊粒子の強度・破壊特性は凝集特性と共に粒子挙動を規定する大きな要因であり、水処理のみならず、海洋アクアゾル¹⁵⁷⁾ など種々の観点からも研究が行われている。しかし、それにもかかわらず、現在のところこれを記述するに十分なモデルは完成されていない。

一般に凝集性粒子の強度・破壊特性に関しては種々の要因が関連しているが、その主なものとしては (1) 粒子の力学的な耐性 (凝集力)、(2) 粒子の受ける流体力学的な抗力、(3) その頻度の三点があげられる。これらの3要素に関連し破壊に関するさまざまな特性が生じてくるが (図 2.3.15)、このうち

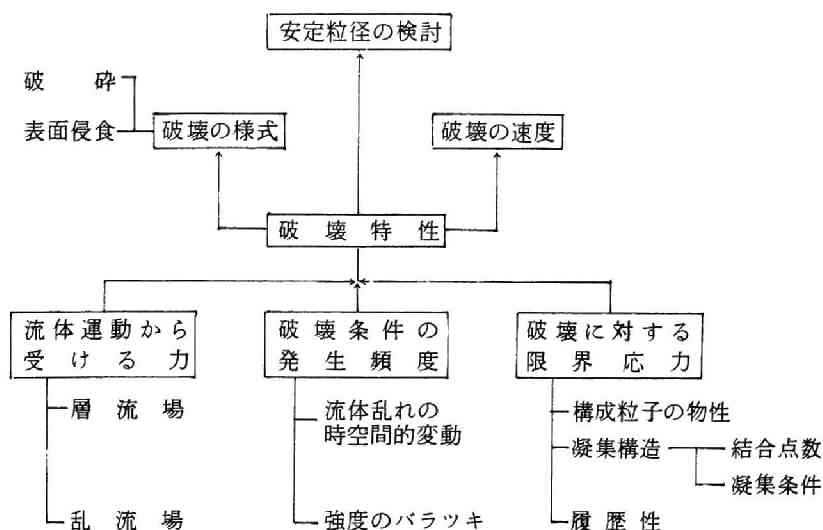


図 2.3.15 破壊に係わる諸因子

従来からしばしば研究の対象として取り上げられてきたものは攪拌強度 G と安定粒径 d_{ms} の関係である。安定粒径とは所定の攪拌強度のもとで凝集による粒径増加，あるいは破壊による粒径減少をおこさないような粒径を称す。この問題は本来的には凝集・破壊両作用の速度論的な考察によって解析すべき問題であるが，従来の研究のほとんどでは（１）と（２）の力の釣り合いとして取り扱う。この操作は例えば安定粒径付近において破壊作用の粒径に対する感度が，凝集作用のそれに比べてかなり大きい時，すなわち次の式（2.3.60）の仮定のもとで近似的に成立すると考えられる。

$$\left| \frac{\partial \ln}{\partial \ln d} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) Br \right|_{d=d_{ms}} \gg \left| \frac{\partial \ln}{\partial \ln d} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) Coag \right|_{d=d_{ms}} \quad (2.3.60)$$

ここに d_{ms} は安定粒径を示す。そこで本研究においてもさしあたってこれを仮定し解析を準静的におこなうことから始めよう。

まず粒子の力学的な耐性を示す凝集力とは付着力，摩擦力などによって一つの集塊を維持していく力であり，その定義自体，明確なものではない。しかるに粒子の挙動を実際に決めるのはこのレベルの概念であり，ファンデルワールスカ・クーロン力などのような個々の要素力に集塊の構造的特性を加味した総

表 2.3.6 フロック限界抗力の一覧

研究者	限界抗力	備 考	粒径に対する巾
Thomas (1963) ¹⁶⁰⁾	$d^2 \sigma_Y$	$\sigma_Y \propto F \cdot N_c$ F : ロンドンファンデル ワールス力, N_c : 接触点数	2
" (1964) ¹⁶¹⁾	$d^2 \sigma_Y$	$\sigma_Y \propto (1-e)^3 / d_1^2$ ビンガム流体の降 伏応力値, d_1 : 一次粒子径	
Camp (1968) ¹⁶²⁾	界面張力	粒径が大きくなるにつれて界面張力値は 低下する (実験結果から)。	
Healy ら (1964) ¹⁶³⁾	$\theta / (1-\theta)$	θ : 高分子凝集剤の吸着座占有率	
丹保ら (1970) ¹⁶⁴⁾	$(1-e)^{2/3} d^2 \sigma_Y$	含水率 e による影響を考慮, 密度関数を 代入すれば $d^{2/3} (\rho_p - \rho_l) r^{-2/3} d^2 - \frac{2}{3} K_\rho \sigma_Y$	$2 - \frac{2}{3} K_\rho$
松尾 (1974) ¹⁶⁵⁾	$\sigma_Y \delta d$	$\delta = \delta_0 (d \leq d_0)$, $\delta_0 (d_0/d)^n$ ($d > d_0$), シェルモデルによる。	$1 - n \sim 1$
楠田 (1973) ¹⁶⁶⁾	$\sigma_Y d^2$	σ_Y : ビンガム降伏値, 形成条件, 直径 などによって変化	
Delichatsios ら (1975) ¹⁶⁷⁾	$\tau_y d$	τ_y : 界面張力	1
Parker ら (1972) ¹⁶⁸⁾	表面せん断抗力= σ_Y $\sigma_Y A_f$	侵食破壊 フィラメント破壊, A_f は粒径によら ない	0
Boadway (1978) ¹⁶⁹⁾	$\sigma_Y d^2$	$\sigma_Y \propto d^\beta$, 粒径増大に伴う脆弱点の増 加	$2 - \beta$
住友ら (1978) ¹⁶⁹⁾	表面せん断抗力= σ_Y $(1-e)^{2/3} d^2 \sigma_Y$	大粒子 小粒子	0 $2 - \frac{2}{3} K_\rho$
Glasgow ら (1982) ¹⁴²⁾	$d^{2.40 \sim 2.47}$	乱流ジェットによる破壊実験, カオリン- 鉄イオン, 陰イオンポリマー	$2.40 \sim 2.47$

合的な取り扱いが必要となる。これらの点を考慮するために集塊自体を例えば球とか立体トラスなどで近似し, その中の応力分布を調べることによって力学的な破壊理論と結び付けようとする試み^{158), 159)}も見られるが, 多くの研究では応力次元, あるいは界面力次元をもった結合強度 σ_Y を与えこれに構造特性を考慮しながら流体力との釣り合いを考えている。表 2.3.6 は, これらの研究を一覧したものであるが, このうち例えば応力次元の結合力 σ_Y を考える代表的な研究である丹保ら¹⁶⁴⁾によれば, 集塊の強度には σ_Y の他に破壊断面積, 含水率 e の影響も考えねばならず破壊に対する全抗力としては $\sigma_Y d^2 (1-e)^{2/3}$

に比例すると言う。いっぽう Camp¹⁶²⁾, Delichatsios ら¹⁶⁷⁾ は液滴の分散理論とのアナロジーから、また松尾¹⁶⁵⁾ は集塊の構造を仮定することによって界面力次元の破壊抗力を考えこれを実験データから計算したがこれらによると単位長当りの破壊抗力は粒度の増大によって減小していくことが報告されており液々の分散理論と同一に扱うことができないことを示している。

次に粒子の受ける流体力学的な力に関しては (1) 慣性力, (2) せん断流れにもとづく引張圧縮力・せん断力, (3) 動圧力, (4) 粒子同志の衝突による衝撃力などが考えられる。(1) に関し Parker ら¹⁶⁸⁾ は Tchen の粒子運動のモデルを出発点として粒子と流体の密度差が原因となって発生するズレ運動を主因とする流体力モデルを作成したが、通常のプロックのごとくほとんど中立粒子に近いものではこの効果は他の作用にくらべほとんど無視できる¹⁴⁰⁾。いっぽう Ham ら¹⁷⁰⁾, Gragrow¹³⁴⁾ は (4) の衝突を破壊の主因として疑ったが、Gragrow 自身が後に実験結果¹⁴²⁾ によって示しているように破壊は粒子数に対し 1 次反動的な挙動を示しており、その限りにおいて (4) は破壊の主因となり得ない。

したがって現在のところ、粒子の受ける流体力学的な力に関しては、粒子全体の運動に対し表面付近での流れが相対的に差異をもつために生ずる表面せん断力とか動圧力などによる力が主体となると考えなければならず、その結果、

表 2.3.7 フロックにかかる応力の一覧

フロックにかかる応力	研 究 者
平均せん断応力: μG	Camp (1968) ¹⁶²⁾ , 楠田(1973) ¹⁶⁶⁾ , Boadway (1978) ¹³⁸⁾ Thomas (1964) ¹⁶¹⁾ , 丹保ら(1970) ¹⁶⁴⁾ , 桜井ら(1980) ¹⁷¹⁾ 松尾(1974) ¹⁶⁵⁾ , Delichatsios (1975) ¹⁶⁷⁾
動圧強度: $\rho D(d)$	
μG (粘性領域) } $\rho D(d)$ (慣性領域) }	
オーバーシュート効果	Parker ら (1972) ¹⁶⁸⁾ , 住友ら(1978) ¹⁶⁹⁾
$\mu \frac{v\rho}{d}, v\rho \propto \frac{\rho_e}{\mu} d^3 G$ (粘性領域)	
$\rho v\rho^2, v\rho \propto \rho_e^{1/2} d^{1/3} \varepsilon^{1/3}$ (慣性領域)	Gragrow (1977) ¹³⁴⁾
境界層に働くせん断力	
$(\mu\rho\varepsilon)^{1/2} d^2$	

$D(d)$ は構造関数を示す $D(d) \propto \frac{\varepsilon}{\nu} d^2$ (粘性領域), $\varepsilon^{2/3} d^{2/3}$ (慣性領域)

粒子自体の運動はそれほど意味をもたないことになる。さらに乱流下においては上記の(2), (3) はいずれもエネルギー逸散率 ϵ , 動粘性係数 ν , 粒子の粒径 d によって次元解析的な方法で記述される。従来の研究の多くもこの観点から取り組んでおり, 表 2.3.7 にそれらを一覧する。

以上が, 粒子の凝集力, 流体力に関する従来の研究の概観であるが, これらを組合わせ安定粒径の計算を行い実験結果との比較をおこなっても必ずしもよい適合性はみられない。図 2.3.16 は, 本研究において得られた体積90%粒径のピーク値と G 値との関係を他の研究が報告している粒径- G 値との関係(表 2.3.8) と共に示したものであり, 図 2.3.17 は各実験の G 値に対する粒径の感度 $\partial(\ln d_{ms})/\partial(\ln G)$ を代表粒子レイノルズ数との関係で示したものであるが, この図に示す $-0.2 \sim -1.0$ の広がりはいずれのモデルによっても説明できず, 上に述べてきた従来のモデルに対する再検討が必要であることがわかる。

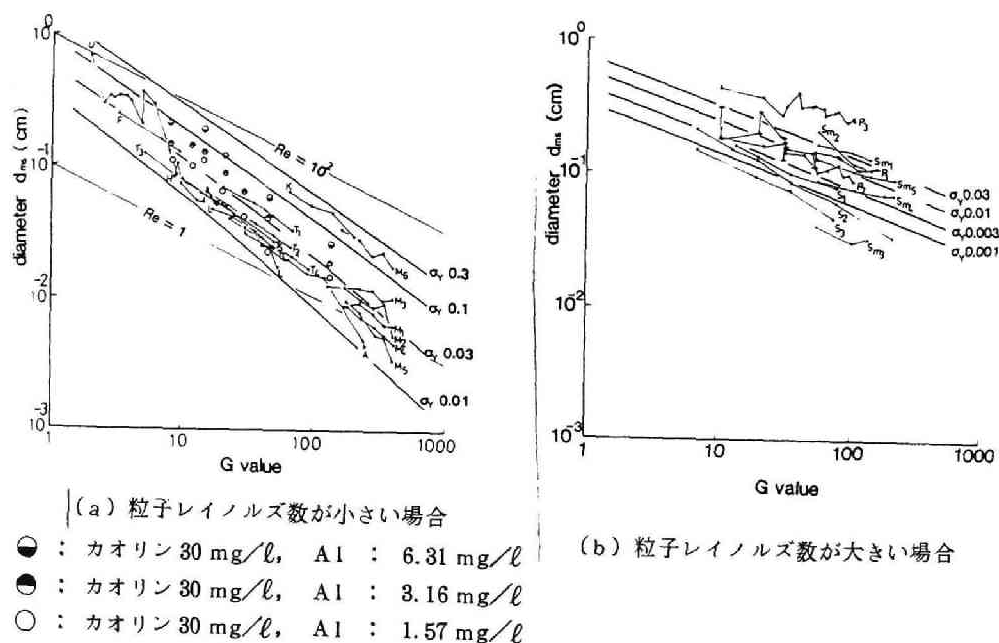


図 2.3.16 安定(最大, 代表)粒径と G 値
 記号は表 2.3.8 を参照のこと, $Re = (G d_{ms}^2 / \nu)$,
 太線は $\Sigma = P$ によって求めた安定粒径と G の関係である。

表 2.3.8 フロック安定粒径の観測

記号	研究者	安定径 (限界径)	測定概況	フロック質
F	Fair ら (1968) ¹¹⁶⁾	面積平均径	円筒, 形成実験 ピーク値	鉄フロック
L	Ludwig ら (1967) ¹³⁹⁾	個数90%径	管路流による破 壊実験	貯水池原水を30mg/ℓのAlにより凝集形 成する
A	Argaman ら (1968) ¹⁴⁸⁾	大粒子径	フロック形成最 終径	カオリン25mg/ℓ, Al 2.3mg/ℓ, 急攪30秒
T ₁	丹保 ら (1970) ¹⁶⁴⁾	大粒子径	フロック形成最 終径	カオリン原水濁度100mg/ℓ, Al 3.2mg/ℓ 活性ケイ酸 1mg/ℓ
T ₂	"	"	"	カオリン原水濁度100mg/ℓ, Al 3.2mg/ℓ
T ₃	"	"	"	カオリン100mg/ℓ, 液体硫酸アルミウム 30mg/ℓ
T ₅	"	"	(管路凝集) フロック形成最 終径	カオリン50mg/ℓ, 硫酸アルミニウム30mg/ℓ
P	Parker ら (1972) ¹⁶⁸⁾	大粒子の最 大径		活性汚泥
U	住友 ら (1978) ¹⁶⁹⁾	大粒子径	フロック形成最 終径	湖原水を硫酸アルミニウム30mg/ℓにより 凝集する
S _{m1~5}	Smith ら (1978) ¹³⁷⁾	平均径 (0.2mm以上)	2重円筒による 破壊実験	Ballotini ビーズ, MgSO ₄ 6~8mM, 陰イオン凝集剤 A-140 2.5~5mg/ℓ
K	古賀 ら (1978) ¹⁷⁴⁾	体積50%径	形成実験ピーク 値	カオリン50mg/ℓ, 硫酸アルミニウム 10 mg/ℓ, アルギン酸ソーダ 3mg/ℓ
S _{1~3}	桜井 ら (1980) ¹⁷¹⁾	重量90%径	フロック形成最 終径	マイクロセルローズ137mg/ℓ, 硫酸アルミニ ウム 7.5mg/ℓ
H	平井 (1980) ¹³⁵⁾	平均体積径	パドルによる破 壊実験	ペントナイト50mg/ℓ, 硫酸アルミニウム 50mg/ℓ
M _{1~6}	松尾 ら (1981) ¹⁴⁰⁾	体積50%径	管路流による破 壊実験	粘土50mg/ℓ, Al 2~10mg/ℓ, M ₆ のみア ルギン酸ソーダ 0.5mg/ℓを加える。

T₁ ~ T₅, M₁ ~ M₆ の G 値は全エネルギー消費量から計算し直している。

さて一般に粒子の凝集力は次の概念によって示されるであろう。

$$\Sigma = f_A \cdot N \cdot k_{\#} \quad (2.3.61)$$

ここに Σ は凝集力, f_A は構成基本粒子 1 接点あたりの平均付着力, N は破壊に関係する付着点数, $k_{\#}$ は寸法効果を示す補正係数である。 N を破壊面内

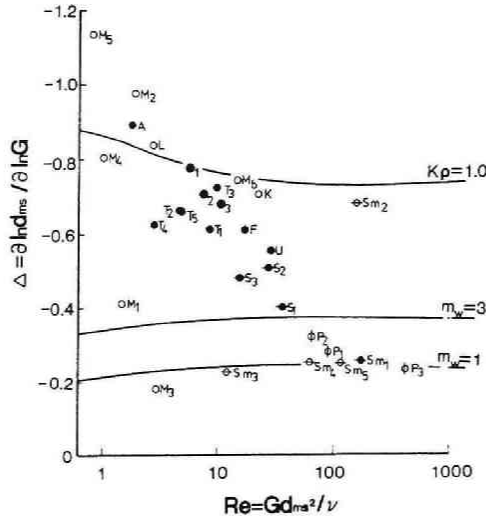


図 2.3.17 粒子レイノルズ数と安定粒径の G 値に対する依存性
代表粒径は測定値の平均とした。

$K\rho = 1.0$ と記している実線は (1) のモデルにて $K\rho = 1.0$ としたものの、 $m_w = 1$ あるいは $m_w = 3$ と記した実線は (2) のモデルにて計算したものである。なお流速構造関数は Batchlor による式 (2.3.56) を使用した。

における付着点数とみなし破壊面の断面積を粒子断面積に比例すると考えると $N \propto d^2$ となるが、実際には (1) 含水率変化の効果、(2) 破壊面積と粒子代表断面積が比例しないことなどの影響があり、簡単ではない。まず (1) の効果を解析するために基本粒子を球形としこれが一様に集塊している場合を考える。この時、集塊断面の単位面積当りの基本粒子個数 n_f 、配位数 k_f と N の間には

$$N = \frac{\pi n_f k_f d^2}{4} \quad (2.3.62)$$

の関係があるから、これに含水率 e と n_f の関係である

$$n_f = \frac{6(1-e)}{\pi d_1^2} \quad (2.3.63)$$

及び Smith が鉛球で行った実験に基づく e と k_f の実験式である¹⁷⁵⁾

$$k_f = \frac{\pi}{e} \quad (2.3.64)$$

さらに e と d の関係式である密度関数

$$\rho_f = (\rho_p - \rho_l) (1 - e) = a d^{-K\rho} \quad (2.3.65)$$

を代入し、フロックなどの場合では $(1 - e)$ が 10^{-2} 以下であることを考慮すれば N と d の関係としては結局、次の式を得る。

$$N = \frac{3 a \pi}{2 d_1^2 (\rho_p - \rho_l)} d^{2-K\rho} \quad (2.3.66)$$

但し d_1 は基本粒子径である。

次に破壊面積と粒子代表断面積が比例しない効果は例えば Parker ら¹⁸⁸⁾ の示したダンベルモデルなどに顕著に示されこの場合には破壊面積は粒径によらなくなる。したがって通常の粒子では、 N と d の関係は上記の含水率の効果と合わせ $N \propto d^{r(2-K\rho)}$ ($0 \leq r \leq 1$) と仮定してよからう。ここに r は定数とする。次に k_W は破壊理論で知られている物体の寸法によって強度が変化する効果¹⁷⁶⁾を示すものであり、 m_w を Weibull の均一性係数として

$$k_W \propto d^{-\frac{3}{m_w}} \quad (2.3.67)$$

なる関係がある。 m_w 値としては他材質のそれから類推し 1 ～ 20 程度の値¹⁷⁶⁾であろう。以上をまとめると凝集力 Σ としては

$$\Sigma = \frac{\pi \sigma_Y d^{r(2-K\rho) - \frac{3}{m_w}}}{4} \quad (2.3.68)$$

となる。従来の強度モデルは式 (2.3.68) にほぼ包含される。但し含水率との依存性が本モデルでは $(1 - e)$ 、丹保ら¹⁸⁴⁾のそれでは $(1 - e)^{2/3}$ となっているがその導出過程から考え前者の方が合理的である。松尾¹⁸⁵⁾によるモデルは $r = 1$ 、 $K\rho = 0$ に対応し、Boadway¹³⁸⁾によるモデルは $r = 1$ 、 $K\rho = 0$ 、 $3/m_w = \beta$ と解釈される。

次に粒子に作用する流体力 P としては前述のことから動圧力，粘性せん断力が考えられるがそれらのうちまず動圧力 (dynamic thrust) についてのもの P_1 は液滴分裂に関する Kolmogoroff の取り扱い¹⁵⁴⁾ にならい $D_p(d)$ を圧力の構造関数として

$$P_1 \cong D_p^{1/2}(d) \frac{\pi d^2}{4} \cong \rho_l D_l(d) \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.3.69)$$

と記すことができる。ここに $D_l(d)$ は縦方向速度構造関数である。これに式 (2.3.51) で示される関数型を代入すれば，

$$P_1 \cong \begin{cases} \frac{\pi \rho_l D_v \varepsilon d^4}{4 \nu} & , d \ll \eta \\ \frac{\pi \rho_l D_\varepsilon \varepsilon^{2/3} d^{8/3}}{4} & , d \gg \eta \end{cases} \quad (2.3.70)$$

$$(2.3.71)$$

を得る。これは丹保ら¹⁶⁴⁾ が用いたものと同一であるが，この P_1 を粒子レイノルズ数 $(d/\eta)^2$ が 1 より小さい領域にまで使用することは，液滴に対する Kolmogoroff モデルに対し Levich¹⁵⁴⁾ が指摘したと同じように疑問な点がある。次に粘性せん断力による流体力 P_2 についてもやはり Taylor の液滴理論¹⁴³⁾ によれば液滴の界面張力を σ ，長径，短径を L ， B ，及び粘性係数を μ_p ，水のそれを μ_l として

$$\frac{L-B}{L+B} = \frac{G d \mu_l}{2 \sigma} \cdot \frac{19 \mu_p - 16 \mu_l}{16 \mu_p - 16 \mu_l} \quad (2.3.72)$$

が成立する。いま通常のプロックに見られる $L \cong 2 B$ ¹³⁸⁾ を代入し $\mu_p = \infty$ として界面張力による凝集力 $\sigma \pi d$ を計算してみると

$$P_2 = \frac{57}{32} \pi G \mu_l d^2 \quad (2.3.73)$$

となる。また粒子を球体と仮定し一様せん断流中に置きクリープ流れとして最大内部せん断力 F_T ，最大内部張力 F_N を計算してみると，

$$F_T = \frac{5}{8} \pi G \mu_l d^2 \quad (2.3.74)$$

$$F_N = \frac{\pi}{4} G \mu_l d^2 \left(5 + \frac{\rho_l G d^2}{16 \pi \mu_l} \right) \quad (2.3.75)$$

を得るがクリープ流れが成立する粒子レイノルズ数が1より小さい時には、 F_T 、 F_N いずれも式(2.3.73)と同型になる。粒子レイノルズ数が1より大きい場合には粒子近傍の流れが粘性領域のそれに較べ複雑になるが、今、仮に粒子の受ける平均的なせん断速度である

$$G(d) \cong \frac{D_t^{1/2}(d)}{d} \cong \varepsilon^{1/3} d^{2/3}, \quad d \gg \eta \quad (2.3.76)$$

が、式(2.3.73)の様式で動くと考えるならば、

$$P_2 \propto \mu_l G(d) d^2 \propto \mu_l \varepsilon^{1/3} d^{4/3}, \quad d \gg \eta \quad (2.3.77)$$

となるからこの場合には P_1 が卓越する。ここに $D_t(d)$ は横方向流速構造関数である。以上をまとめると粘性、慣性両領域を通し粒子の受ける力 P は

$$P = \left[C_1 \rho_l D_l(d) + C_2 \mu_l \frac{D_t(d)^{1/2}}{d} \right] \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.3.78)$$

として近似することができよう。ここに C_1 としては式(2.3.69)から1程度、また C_2 としては式(2.3.75)から5程度を考えることができる。さらに $D_l(d)$ には Batchelor の補間式(2.3.56)を利用すれば、 $D_t(d)$ は等方性・連続条件を使用して次の式(2.3.79)によって求めることができるから

$$D_t(d) = D_l(d) + \frac{d}{2} \cdot \frac{d D_l(d)}{d(d)} \quad (2.3.79)$$

流体力 P を d に関する陽的な関係に書き下すことが可能となる。ここに式(2.3.78)の2つの項をその適用領域を越えて使用する誤りはそれらの項が卓越項とならないことからそれほど問題とはならない。以上、粒子に荷される流体力をまとめると表2.3.9のようになる。

表 2.3.9 フロックにかかる流体力 P

	動力圧(dynamic thrust)	粘性せん断力
領域	$C_1 \rho_l D_l(d) \frac{\pi}{4} d^2$	$C_2 \mu_l \frac{D_t(d)^{1/2}}{d} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$
$R_e \ll 1$	$\left(\frac{C_1 \pi \rho_l D_\nu \varepsilon d^4}{4 \nu} \right)$	$C_2 (2 D_\nu)^{1/2} \rho_l \nu^{1/2} \varepsilon^{1/2} \frac{\pi d^2}{4}$
$R_e \gg 1$	$\frac{C_1 \pi \rho_l D_\varepsilon \varepsilon^{2/3} d^{8/3}}{4}$	$\left(C_2 \pi \left(\frac{4}{3} D_\varepsilon \right)^{1/2} \mu_l \varepsilon^{1/3} \frac{d^{4/3}}{4} \right)$
補間式	$\left[C_1 \rho_l D_l(d) + C_2 \mu_l \frac{D_t(d)^{1/2}}{d} \right] \frac{\pi}{4} d^2$	

$$R_e = \frac{d^2 \varepsilon^{1/2}}{\nu}, \quad D_\nu = \frac{1}{15}, \quad D_\varepsilon = 2.21$$

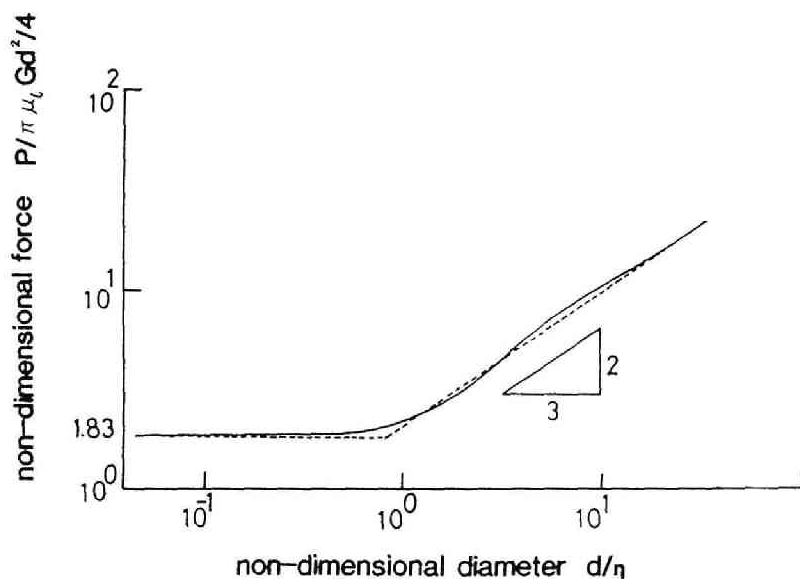


図 2.3.18 P の挙動

η : Kolmogoroff のミクロスケール

また図 2.3.18は $(\pi \mu_l G d^2) / 4$ によって無次元化を行なった P の挙動を式 (2.3.78) で算出したものを示す。

さて式(2.3.68)の Σ と上で求めた P を等値することによって安定粒径の算出ができるが、そのためには破壊面に関するパラメータ r 及び材質の均一性に関するパラメータ m_w の仮定が必要となる。下の2つの場合を考える。

(1) 粘土系の粗コロイドを低分子量の金属多価イオンで凝集した場合は凝集剤の架橋効果もそれほど強くなく、吸着点は粒子内に比較的一様に分布すると考えられ、比較的均質等方な物性をもった集塊が発生し易い。たとえば $m_w = 20$ 、 $r = 10$ とすると

$$\Sigma = \frac{\pi \rho_Y d^{2-K\rho - \frac{3}{20}}}{4} \quad (2.3.80)$$

となるから安定粒径としては

$$d_{ms} \propto \begin{cases} \left(\frac{\mu_l G}{\sigma_Y} \right)^{-\frac{1}{K\rho + \frac{3}{20}}} & , d_{ms} \ll \eta \quad (2.3.81) \\ \left(\frac{\rho_l \mu_l^{2/3}}{\sigma_Y} \right)^{-\frac{3}{3(K\rho + \frac{3}{20}) + 2}} - \frac{4}{3(K\rho + \frac{3}{20}) + 2} & , d_{ms} \gg \eta \quad (2.3.82) \end{cases}$$

となる。図2.3.16(a)に示した太線は $K\rho = 1.0$ として式(2.3.56)によって遷移領域における d と G の関係を求めたものである。

(2) 活性汚泥フロックなどでは中間的な大きさをもった粒子がフィラメント状に連結されている場合が多いと考えられる。したがって、このようなフロックの強度にはこの連結部分の強度が大きくかかわっている。この場合、フィラメント断面自体の強度は粒度スケールには無関係($r = 0$)になるが、逆に寸法効果の影響が強くなり、その長さが長くなるほど強度は低下するであろう。いま、連結部の数あるいは長さが粒度スケールに比例すると考えると $m_w = 1 \sim 3$ 程度の値となる。式(2.3.68)に $r = 0$ を代入して

$$\Sigma = \frac{\pi \sigma_Y d^{-\frac{3}{m_w}}}{4} \quad (2.3.83)$$

したがって

$$d_{ms} \propto \begin{cases} \left(\frac{\mu_l G}{\sigma_Y} \right)^{-\frac{1}{2 + \frac{3}{m_w}}}, & d_{ms} \ll \eta \quad (2.3.84) \\ \left(\frac{\rho_l \nu^{2/3}}{\sigma_Y} \right)^{-\frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{3}{m_w}}} G^{\frac{4}{8 + \frac{9}{m_w}}}, & d_{ms} \gg \eta \quad (2.3.85) \end{cases}$$

を得る。図 2.3.16 (b) の太線は $m_w = 3$ として式 (2.3.56) によって遷移領域における d_{ms} と G の関係を求めたものである。

以上は粒子強度に関する両極端のモデルであったが、実際の破壊は両様式の中間にあると考えられる。これは G 値に対する粒径の感度 A

$$A = \frac{\partial \ln d_{ms}}{\partial \ln G} \quad (2.3.86)$$

をプロットした図 2.3.17 において上記モデルによる推定値と実験値を比較することによっても明らかであろう。なお、本図から粒子レイノルズ数が大きくなるにつれて (1) から (2) の様式に連続的に推移していく様子が見られるが、こうした変化は上記のモデルでは説明できない。今後の研究課題の一つである。

次に粒子破壊の動的特性について検討する。破壊の動特性に関する研究の多くは大粒子の破壊による微小粒子の増大速度という点から行なわれてきた。例えば、Parker ら¹⁸⁸⁾による取り扱いでは、微小粒子数 n_1 の増加は粒径 d の大粒子が 1 回の侵食破壊によって N_1 個の微小粒子を放出すると考え

$$\left(\frac{d n_1}{d t} \right)_{B_r} = n N_1 f_b \quad (2.3.87)$$

と仮定する。ここに n は大粒子の個数密度を、 f_b は破壊の周波数とする。前記破壊関数に照らしあわせて考えれば、 f_b は選択関数に、 N_1 は破碎関数に相当する。その他、代表的な研究を表 2.3.10 に示すが、これらを総合し検討してみると、まず選択関数 $P_b(d)$ としては次のように考えることができる。

$$P_b(d) \propto f_{b1}(P) \cdot f_{b2}(P, \Sigma) \quad (2.3.88)$$

表 2.3.10 フロック破壊の選択関数一覧

研究者	選択関数	備 考	ε, d などで表わした関数型
Thomas (1964) ¹⁶¹⁾	$u' k$	$u'(d) \propto \frac{\varepsilon}{\nu} d, (d \ll \eta), k$: 動圧強度が σ_Y となる波数 $\propto \varepsilon^{1/3} d^{1/3}, (d \gg \eta)$ $\sigma_Y \cong \rho_l \int_k E(k, t) dk$	$\varepsilon d \left(\frac{\sigma_Y}{\rho_l}\right)^{1/2} \nu^{-1}$ $\varepsilon^{4/3} d^{1/3} \left(\frac{\sigma_Y}{\rho_l}\right)^{-3/2}$
Healyら (1964) ¹⁶³⁾	$[\theta(1-\theta)]^{-1} d$	θ : 高分子凝集剤の吸着座占有率, ストークス則を基にする	
Argaman (1968) ¹⁴⁸⁾	$d_1/d \bar{u}^2$	侵食モデル, $dn_1/dt \propto d^2/d_1^2 n u^2$ から n_1 : 微小粒子数, d_1 : 微小粒子径	
Parker (1972) ¹⁶⁸⁾	$d_1/d f$	$f \propto \varepsilon^{1/2} \nu^{-1/2}, (d \ll \eta)$, 侵食モデル $\propto \varepsilon^{1/3} d^{-2/3}, (d \gg \eta)$	$\varepsilon^{1/2} d^{-1} \nu^{-1/2} d_1$ $\varepsilon^{1/3} d^{-5/3} d_1$
Glasgow (1977) ¹³⁴⁾	凝集係数 \times 有効係数 $f(\mu \rho_l \varepsilon)^{1/2} d_2$	衝突モデル せん断力モデル, 層流境界層から受けるせん断力, f : 渦周期	$\varepsilon^{5/6} d^{4/3} (\mu \rho_l)^{1/2}$
住友ら (1978) ¹⁶⁹⁾		実験結果 + ε の超過理論による解析	$d^{3.7} \varepsilon^{3.17}$ $d^{5.8} \varepsilon^{3.36}$
Boadway (1978) ¹³⁸⁾	$P_r f$	P_r : 負荷応力 σ がかった時の破壊する確率 $= \frac{\sigma}{\sigma_Y} \propto \nu G d^\beta$ f : σ がかかる周波数 $\propto G^{-1}$	εd^β
Huckら (1978) ¹⁷⁸⁾	$[\theta(1-\theta)]^{-1} G d$	Healy らのモデルに乱れによる効果を加える	$\varepsilon^{1/2} \nu^{-1/2} d$
Pandyaら (1982) ¹³⁵⁾	G d^{3m}	侵食モデル 分裂モデル	

ここに $f_{b1}(P)$ は粒径 d の粒子破壊に効果的な液体力 P の周波数スケール,
 $f_{b2}(P, \Sigma)$ は粒径 d によって定まる凝集力 Σ の粒子が流体力 P によって破壊
 される割合である。 $f_{b1}(P)$ に関しては次の 2 通りが考えられる。

(1) 破壊が槽内で一様に生じていると近似できる場合, $f_{b1}(P)$ は乱れの
 時間スケールに反比例すると考えられる。すなわち

$$f_{b1}(P) \propto \begin{cases} (\varepsilon / \nu)^{1/2}, & d \ll \eta \\ \varepsilon^{1/3} d^{-2/3}, & d \gg \eta \end{cases} \quad (3.2.89)$$

$$(2.3.90)$$

である。

(2) エネルギー逸散率が局部的に偏在しており、その部分での破壊が卓越する時にはこの領域との移流あるいは乱流拡散による交換が律速となる。領域の長さスケールを L とし次元解析を用いると $f_{b1}(P)$ としては

$$f_{b1}(P) \propto \varepsilon^{1/3} L^{-2/3} \quad (2.3.91)$$

となる。

次に $f_{b2}(P, \Sigma)$ については住友ら¹⁸⁹⁾は閾値横断理論を基礎として、Boadway¹³⁸⁾、田中ら¹⁸¹⁾は簡単な仮定を立てることによって解析をおこなった。これらはいずれも $f_{b2}(P, \Sigma)$ を Σ と P の比である“破壊条件数”¹⁸⁵⁾の簡単な関数型とするものであり、本研究でもこれらにしたがい

$$f_{b2}(P, \Sigma) \propto \left(\frac{P}{\Sigma}\right)^{b_2} \quad (2.3.92)$$

とする。式 (2.3.92) の P, Σ に式 (2.3.68)、表 2.3.9 を代入すれば

$$f_{b2}(P, \Sigma) \propto \begin{cases} \left(\rho_l \nu^{1/2} \sigma_Y \varepsilon^{1/2} d^{2-r(2-K\rho)+\frac{3}{m}}\right)^{b_2}, & d \ll \eta \quad (2.3.93) \\ \left(\rho_l \sigma_Y^{-1} \varepsilon^{2/3} d^{8/3-r(2-K\rho)+\frac{3}{m}}\right)^{b_2}, & d \gg \eta \quad (2.3.94) \end{cases}$$

を得る。以上から $P_b(d)$ は例えば上記 (2) の場合には

$$P_b(d) \propto \begin{cases} \rho_l^{b_2} \nu^{b_2+\frac{1}{3}} \sigma_Y^{-b_2} G^{2/3+b_2} d^{b_2\{2-r(2-K\rho)+\frac{3}{m}\}} L^{-2/3}, & d \ll \eta \quad (2.3.95) \\ \rho_l^{b_2} \nu^{\frac{2}{3}b_2+\frac{1}{3}} \sigma_Y^{-b_2} G^{\frac{4}{3}b_2+\frac{2}{3}} d^{b_2\{\frac{8}{3}-r(2-K\rho)+\frac{3}{m}\}} L^{-2/3}, & d \gg \eta \quad (2.3.96) \end{cases}$$

となる。

$P_b(d)$ に関する実験的研究は少ない。Boadway¹³⁸⁾は大フロックの破壊速度を $G^2 d^\beta$ とおいた時、破壊実験における平均粒径の変化から $\beta = 1$ として矛盾がないことを述べ、Pandya ら¹³⁶⁾はカオリン-鉄フロックの破壊実験中

の粒度分布の変化から体積の 0.33 乗に比例すると述べているものの今だ検討すべき点が多い。Glasgow らの実験結果¹⁸⁰⁾、及び栗谷ら¹⁷⁹⁾の数値シミュレーションによる結果にも同様の問題が残る。したがってここでは先に述べた破壊実験による結果のみを式 (2.3.93) (2.3.94) と比較する。実験においては $P_b(w) = \alpha_2 w^{b_n}$ とし α_2 、 b_n を求めている。表 2.3.11 はこれを一覧したものである。このうち特に α_2 を G に関しプロットしたものを図 2.3.19 に示すがこれを見ると α_2 の G に対する依存性、すなわち $P_b(d)$ 中の G の巾 n_2 としては 1.97 ~ 2.61 の範囲となる。これを上に述べた $P_b(d)$ の推定式との関連で検討すれば実験データは $r = 0$ 、(2) のメカニズムに近い位置にプロットされる (図 2.3.20)。但し湖泥データの $b_n = 1.75$ はカオリンデータからの推定であり再検討を要する。

表 2.3.11 フロック破壊実験の結果

実験番号	Al量 (mg/ℓ)	形成 G 値	形成時間 (秒)	破壊 G 値	破壊速度 $\bar{\alpha}_2$	備 考
6120	3.16	14.7	7200	114	833	
6130	3.16	14.7	3600	114	954	
9090	3.16	14.7	3600	76.3	300	
6131	3.16	14.7	3600	55.9	780	
9091	3.16	14.7	3600	43.4	65.4	カオリン
9092	3.16	14.7	3600	35.0	43.3	30 mg/ℓ
8260	3.16	14.7	3600	29.0	31.1	フロック
7130	3.16	8.7	5400	114	1405	
8270	3.16	26.7	2400	114	641	
7081	3.16	37.2	1800	114	395	
7080	6.31	14.7	3600	35.0	27.1	
7082	6.31	14.7	3600	76.3	140.5	
7110	6.31	14.7	3600	114	470.5	
11250	2.56	16.5	3600	114	171	湖泥 5.6 mg/ℓ
11251	2.56	16.5	3600	76.3	60.5	アルギン酸ソーダ
11252	2.56	16.5	3600	35.0	16.0	2 mg/ℓ

* 破壊速度 $\bar{\alpha}_2$ は次式で定められる粒径基準への換算値であり、 $b_n = 1.75$ 、 $\rho_p = 2.6$ 、及び $\text{cm}^{1.75-3-K\rho}$ s^{-1} 単位である。

$$P_b(w) = \alpha_2 w^{b_n} = \bar{\alpha}_2 d^{\bar{b}_n}, \quad \bar{b}_n = b_n(3 - K\rho), \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_p - \rho_l} \right)^{bw} \left(\frac{a\pi}{6} \right)^{b_n}$$

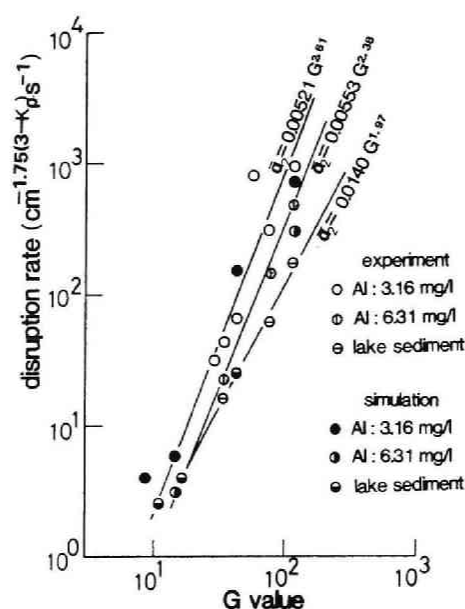


図 2.3.19 α_2 値と G 値

実験値と、第 2.3.9 節のシミュレーションによって検定した値を示す。回帰直線は実験値によるもの。

破壊の様式，あるいは破碎関数 $G(w, w')$ についての実証的な研究もほとんど行われていない。表 2.3.12 は各研究者が推測した破壊様式の一覧であるが，これらのうち実測に基づくものは Quigley¹⁴¹⁾，Glasgow ら¹⁸⁰⁾ のみである。しかし，彼らの行なっている実験では可視化を容易にするため特殊な破壊場を設定しており，この結果を一般の乱流場にまで適用し得るかは疑問である。現在，推測されている破壊の様式としては，粒子表面に付着する小粒子が侵食されるように剥離する侵食破壊，および，比較的粒度がそろった少数個の粒子に分裂する様式の 2 通りがある。Argaman¹⁴⁸⁾，Parker ら¹⁸⁵⁾ は前者の様式を主張し，Thomas¹⁸¹⁾，Fair ら¹¹⁶⁾ は後者の様式を主張し，楠田¹⁸⁶⁾ は流体力と凝集力の比によって両様式が切り換わることを述べているが，いずれも確たる根拠があるものではない。

森・神保¹⁸¹⁾ は粉碎プロセスにおける上記の両様式をそれぞれ表面粉碎，体積粉碎と名付け粒度分布の時間的変化の相違によって両者を区分したが，同様の観点から平井¹³⁵⁾，Glasgow ら¹⁴²⁾ は破壊卓越時におけるそれを追跡し，分裂様式が大きな役割りを果している事を推定している。いずれにせよ，実際

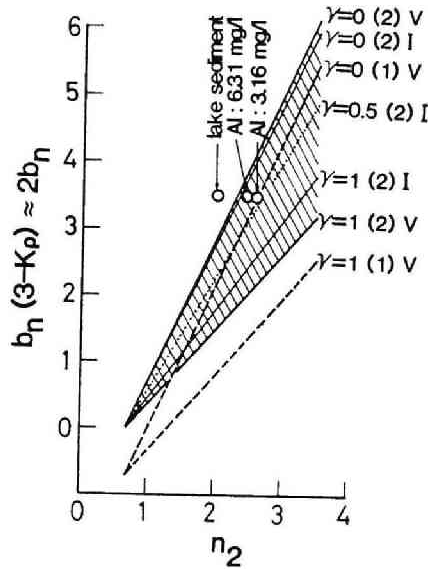


図 2.3.20 式 (2.3.95) などによる n_2 と b_n の関係

$\gamma = 0.5$ (2) I とは $\gamma = 0.5$, 破壊場の偏在, $d \gg \eta$ での破壊卓越を意味する。

(1) : 全領域で破壊

(2) : 破壊場は偏在

V : $d \ll \eta$ での破壊卓越

I : $d \gg \eta$ での破壊卓越

$\gamma = 0.5$ (2) I では n_2, b_n は式 (2.3.96) から

$$b_n(3 - K_p) = b_2 \left\{ \frac{8}{3} - \gamma(2 - K_p) + \frac{3}{m} \right\}$$

$$n_2 = \frac{4}{3} b_2 + \frac{2}{3}$$

の関係がある。 $m = 20$; $\gamma = 0.5$, $K_p = 1$ とすれば

$$b_n(3 - K_p) = 1.74 n_2 - 1.16 \quad \text{となる必要がある。}$$

の現象においては片方のみの様式が起っているとは考え難く、程度の差は存在するものの両者が混在していると考えるのが自然であろう。

破碎関数自体については採鉱学の分野で古くから使用されてきた。表 2.3.2 に著名なものを一覧しているがそれらの導出の背景となった理論及び仮定、例えば亀裂密度理論¹⁴⁵⁾等を凝集粒子にそのまま適用し得るかは疑問である。但しこれらをフロックの破碎関数型に対する候補関数とみなすことは一向に差し支えなく、上記の破壊実験でもそのような使用法を行なっている。田中ら¹⁴⁴⁾は表中 (1) の関数によって (2), (3) のそれを近似できることを述べてい

表 2.3.12 フロック破壊様式の一覧

研究者	様式	根拠
Thomas ら (1964) ¹⁶¹⁾	同じ大きさの 2 個に分裂する	取り扱いの容易さ
Fair ら (1963) ¹¹⁶⁾	同じ大きさの 4 個に分裂する	最大径以上付着しない, 2,3 個に分裂するなどの仮定も併用する
Argaman (1968) ¹⁴⁹⁾	表面から侵食	
丹保 ら (1972) ¹²⁹⁾	最大粒径以上には成長しない	
楠田 (1973) ¹⁶⁰⁾	$\mu G < \sigma_Y$: 侵食 $\mu G \geq \sigma_Y$: 分裂	
Parker ら (1972) ¹⁶⁸⁾	表面侵食 フィラメント状のフロックは分裂	
Quigley (1977) ¹⁴¹⁾	分裂+表面侵食	観察, 4 ローラシステム
Pandya ら (1980) ¹³⁶⁾	正規分布形に分裂	
Glasgow ら (1982) ¹⁸⁰⁾	分裂	観察

るが、図 2.3.21 に示す如く場合によっては大きな誤差を生ずることがある。ただし図 2.3.22 に示すように破壊実験で定められたパラメータを使用して比較したものではその差はそれほど問題となっていない。

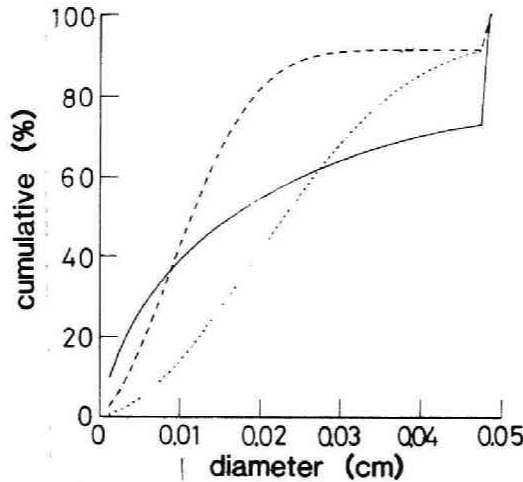


図 2.3.21 破壊関数による粒度分布の違い。初期分布は $d = 0.05$ cm 単分散とする。

1/10 に分裂する場合。 $b_n = 1.75$, $\alpha_2 = 0.886 \times 10^{10}$,
60 秒後, $\alpha = 1.9 \times 10^{-4}$, $K_D = 1.1$

実線: 式 No. 1, $m = 1/9$

破線: 式 No. 2, $m = 9$

点線: 式 No. 3, $m = 9.995440$

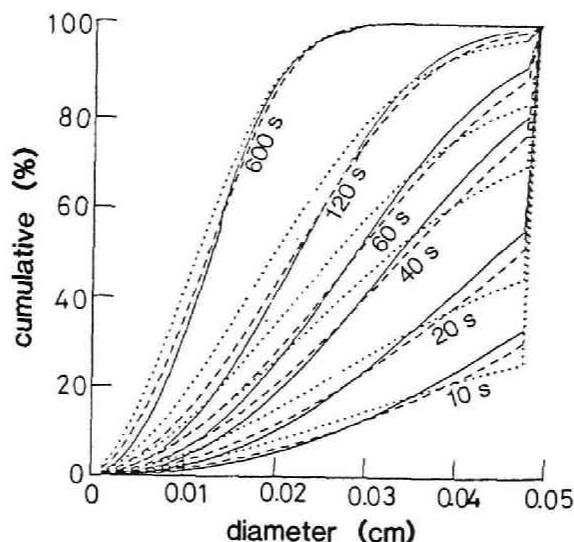


図 2.3.22 破壊関数による粒度分布の違い

初期分布は $d = 0.05$ cm 単分散とする。表 2.3.2 による同定パラメータ $a = 1.9 \times 10^{-4}$, $K_p = 1.1$

実線：式 No. 1, $\alpha_2 = 0.386 \times 10^{10}$

破線：式 No. 2, $\alpha_2 = 0.350 \times 10^{10}$

点線：式 No. 3, $\alpha_2 = 0.280 \times 10^{10}$

破壊関数とは元来、破壊現象を巨視的に取り扱う際の数学的簡便性から生じたものであり破壊様式と一対一に対応するものではないが、仮に \bar{w} を

$$\bar{w} = \int_0^w w' \frac{\partial}{\partial w'} G(w', w) dw' = w - \int_0^w G(w', w) dw' \quad (2.3.97)$$

と定義すれば、これは破壊による新生粒子の平均粒度に対応するものとなる。表 2.3.2 のパラメータをもとにこれを算出するといずれの関数型によってもほぼ母粒子の $1/2$ 程度の粒子が生成されていることがわかる。

2.3.8 衝突合一確率

凝集係数による衝突速度と、実際に観測される粒子凝集速度には大きな隔たりがあることは既に述べたが、この点に関しては Smoluchowski¹⁰⁵⁾ が分散粒子系の力学を創設した時から既に検討が行なわれていた。すなわち凝集係数に $0 \leq \alpha \leq 1$ なる係数 α を乗じてこれを緩速凝集と名付けることによって $\alpha = 1$

の場合と同様の取り扱いを行おうとするのがそれである。 α は衝突粒子間に電気二重層による反発ポテンシャルが存在する場合には極めて小さい値となるが、その他に流体力学的相互作用力によっても影響される。 α の値に関する報告値としては $0.01 \sim 0.488$ ^{182)~184)}と非常に広範囲にわたっているが、さらにこうした値は攪拌の継続によって低下する傾向をもつ。また今まで述べてきた凝集破壊モデルでは可逆的な挙動を示すはずであるが、実際には破壊された粒子の再凝集はきわめて困難である。したがって、ここでは衝突合一確率 α を(1)流体力学的相互作用力、(2)経時的な劣化などに示される不可逆的な変化、の2点から検討する。なお、電気力学的な反発ポテンシャルについては前処理等によって無視し得る範囲となっていると想定することにする。

まず、流体力学的相互作用力による衝突の抑制に関してはしばしば単純せん断場における2体問題として取り扱われてきた。例えば Zeichner¹⁸⁶⁾、Adlerら¹⁸⁷⁾は Batchler・Green¹⁸⁸⁾が示した2体間の接近流速からそれを求めているが、その計算はきわめてやっかいなものである。いっぽうフロックなどでは透水性も大きな影響を及ぼす。楠田ら¹⁸⁹⁾はこの効果を評価するために淡塩水界面におけるフロック沈降速度から透水係数を求めこれを考慮に入れた単純せん断場における衝突合一確率を求めている。

$$\alpha_f = (1 - r_1) \cdot \left\{ 1 - 2.5 \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^3 + 1.5 \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^5 \right\} + \\ (1 - r_2) \cdot \left\{ -2.5 \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2} \right)^3 + 1.5 \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2} \right)^5 \right\} + r_1 \\ (d_1 > d_2) \quad (2.3.98)$$

ただし α_f は粒径 d_1 と d_2 の粒子が凝集する時の流体力学的な原因による合一確率であり r_1 、 r_2 は

$$r_1 = \frac{10 \mu k_1}{\frac{d_1^2}{4} + 10 \mu k_1}, \quad r_2 = \frac{10 \mu k_2}{\frac{d_2^2}{4} + 10 \mu k_2} \quad (2.3.99)$$

である。 k は透水係数である。 $d_1^2/4 k_1$ は粒径によらずほぼ $0.1 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ 程度の値¹⁹⁰⁾をとることが報告されているから、 $r_1 \cong r_2 \cong 0.5$ であり α_f も

$d_2 \gg d_1$ の時にはほぼ 0.5 となる (図 2.3.23)。

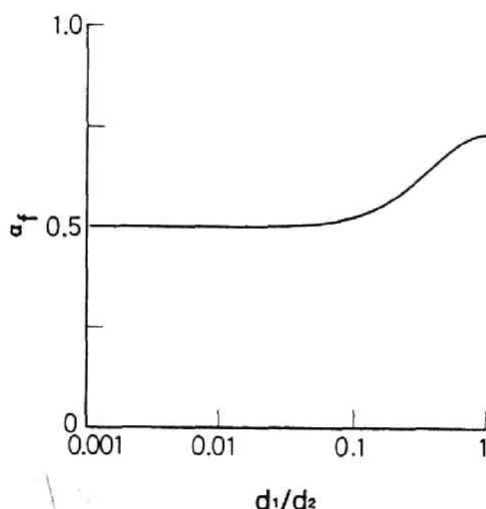


図 2.3.23 式 (2.3.98) による α_f の挙動

次に経時的、あるいは破壊による劣化については経験的にも古くから知られまた楠田ら¹⁷⁴⁾、桜井ら¹⁷¹⁾はこれを実験的に確かめているが、その原因は今だ明らかではない。高分子凝集剤による架橋結合に関連して LaMer・Healy¹⁹¹⁾は長時間の攪拌あるいは強攪拌が架橋構造を破壊しその自由端が折れ曲がって自己吸着することにより凝集能力を低下させる可能性を述べているが、3価 Al, Fe 塩などを凝集剤として用いる場合でもそれらは通常の条件下にて水酸化重合体を構成し荷電・架橋型の凝集を行なっている¹⁹²⁾から、上記メカニズムによる劣化の可能性はある。Van de Ven¹⁹³⁾は高分子鎖の衝突半径に及ぼす影響を述べ強いせん断力がそれらの高分子鎖を破壊したり母粒子にからみ付かせることによって架橋型の凝集が困難になるとの推測をしているが、これは LaMer・Healy¹⁹¹⁾が述べた上記の機構にほぼ同一である。こうした推測あるいは実験結果から衝突合一確率の経時変化モデルが満たすべき要件をまとめれば次のようになる。

- (1) 衝突合一確率は粒子表面の“活性度”に深く関連する。
- (2) “活性度”は攪拌・混合によって次第に低下する。その程度は破壊作用を強く受けるような攪拌をうけた粒子群ほどその低下が激しいと考えられる。

(3) 衝突合一あるいは破壊プロセスにおいて“活性度”が何らかの保存則に従っているとの報告はない。しかし、仮にそれが Smellie・LaMer¹⁹⁴⁾が述べるように“活性面”の被覆で表わすことができるならば、この面積の変化を追跡することによって衝突合一確率の変化を予測できるであろう。以上の推論を基に本研究で仮定する衝突合一確率のモデルは次のようなものである。

(1) 衝突合一確率は流体力学的な効果を示す式 (2.3.98) 及びそれ以外の効果を示す α_c の積として表わされる。

(2) “活性度”とは粒子表面のうち“活性”を示す面積 S_a と全表面積 S の比によって表わされる。

(3) 粒子を球によって近似し S_1 , S_2 の表面積を持った粒子が合一した時の新生粒子の表面積 S_3 は、問題となる粒度領域にて密度関数の成立を仮定すると、

$$S_3 = (S_1^{\frac{3-K\rho}{2}} + S_2^{\frac{3-K\rho}{2}})^{\frac{2}{3-K\rho}} \quad (2.3.100)$$

である。活性面に関し合一後の再配置等の際、活性面の損耗が予想されるから上式の β_1 倍になるとして次式で考える。

$$S_{a3} = \beta_1 (S_{a1}^{\frac{3-K\rho}{2}} + S_{a2}^{\frac{3-K\rho}{2}})^{\frac{2}{3-K\rho}} \quad (2.3.101)$$

例えば $K\rho = 1$ とすれば

$$S_{a3} = \beta_1 (S_{a1} + S_{a2}) \quad (2.3.102)$$

となり凝集によって総活性面は β_1 倍になる。

(4) せん断力、破壊は活性度低下をもたらすがそれが O'Melia¹⁹⁵⁾の言う破壊を伴わない2次吸着的な様相をもつもの(彼の言う反応2B)かあるいは破壊に引き継いで発生する2次吸着的なもの(彼の言う反応4A, 4B)であるかは定かではない。いずれにせよ、その挙動は流体力と粒子の関連と言う点からみて粒子破壊と多くの類似性があると想像され、ここでは破

壊選択関数によって劣化速度の表現を試みる。

(5) 上記の(3), (4) から S_a の変化に関する動力学式は次のようになる。但し, 流れ, 拡散等の影響は考慮していない。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [S_a(w) n(w)] &= \frac{\beta_1}{2} \int_0^w dw' \alpha(w-w', w') K(w-w', w) n(w-w') \\ &\quad n(w') \left\{ S_a(w-w')^{\frac{3-K\rho}{2}} + S_a(w')^{\frac{3-K\rho}{2}} \right\}^{\frac{2}{3-K\rho}} \\ &\quad - \int_0^\infty dw' \alpha(w, w') K(w, w') \cdot n(w) n(w') S_a(w) \\ &\quad - (1+\beta_2) P_b(w) n(w) S_a(w) \\ &\quad + \int_w^\infty dw' P_b(w') n(w') S_a(w') \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') \quad (2.3.103) \end{aligned}$$

ここに β_1 , β_2 は不活性化速度を示すパラメータである。

(6) 質量 w の粒子表面積 S は, 球形仮定により

$$S = A_S w^{\frac{2}{3-K\rho}}, \quad \text{但し} \quad A_S = \frac{\pi}{4} \left[\frac{6(\rho_p - \rho_l)}{a\pi\rho_p} \right]^{\frac{2}{3-K\rho}} \quad (2.3.104)$$

となる。式(2.3.103)の積分を部分分割法によって行うことにし, 式(2.3.14)と同様にして

$$S_{al} = \frac{1}{w_l - w_{l-1}} \int_{w_{l-1}}^{w_l} S_a(w) n(w) dw, \quad l=1, 2, \dots, N \quad (2.3.105)$$

$$\begin{aligned} S_l &= \frac{1}{w_l - w_{l-1}} \int_{w_{l-1}}^{w_l} S(w) n(w) dw \\ &= \frac{A_S (3-K\rho) \cdot \left[w_l^{\frac{2}{3-K\rho}} - w_{l-1}^{\frac{2}{3-K\rho}} \right]}{2 (w_l - w_{l-1})} c_l \quad (2.3.106) \end{aligned}$$

とする。第 l 区分中の $S_a(w)$ の分布を

$$S_a(w) = \frac{S_{ai}}{n(w)} = \frac{w S_{ai}}{c_i}, \quad w_{i-1} \leq w < w_i \quad (2.3.107)$$

とし $w' (w_{i-1} \leq w' < w_i)$ と $w (w_{j-1} \leq w < w_j)$ の粒子間の流体力学的な原因以外の衝突合一係数 $\alpha_c(w', w)$ を

$$\alpha_c(w', w) = \overline{\alpha_c} \frac{S_{ai}}{S_i} \cdot \frac{S_{aj}}{S_j} \quad (2.3.108)$$

と仮定する。 $\overline{\alpha_c}$ は定数である。

(7) 粒子の挙動に関する数値シミュレーションを行なうには、粒子の G D E である式 (2.3.15) と “活性面” 変化を示す G D E である式 (2.3.103) を連立する必要がある。式 (2.3.103) の部分分割法による積分は第 2.3.3 節に示した方法と同じようにして行なえばよい。また密度関数のパラメータ K_ρ , a は式 (2.3.10) にしたがって dc を境に変化させる。

(8) 計算に使用する係数 β_1 , β_2 は計算粒度分布と実測のそれを比較することによって決定する。

以上、本節においては衝突合一確率を流体力学的要因によるものと表面劣化に帰因するものとに分離しその各々について検討を行った。特に後者に関しては簡単な仮定によってその変化モデルの記述を試みたために陽的な表現を得るに到っていない。その他、問題点となる所も多いが、こうした簡単なモデルによる衝突合一確率値によって実際の粒度分布変化の予測が可能ならばその貢献も大であろうし、また今後の衝突合一確率に関する機構解明に対しても示唆する所があると考えられる。なお、本モデルによる計算値と実験値の比較は次節に述べる。

2.3.9 数値シミュレーションの実験との比較

ここでは前節までに述べてきた凝集性粒子の動力学モデルを実験結果と比較しモデルの検証を行う。モデル計算に使用した各サブプロセスモデルを取りまとめると表 2.3.13 のようになる。粒度分布の初期値としては (1) 1 強度のみの攪拌 (急攪・緩攪の別なし) を行った場合には薬注直前に観測した粒度分布を、(2) 急攪・緩攪の 2 段階攪拌を行った場合には緩攪開始時に観測した粒度

表 2.3.13 フロック形成実験との比較に使用した シミュレーションサブモデル

フロック特性	記号	モデル式	根拠
混合強度	G	式 (2.3.34), 式 (2.3.32), 割引率 0.68	回転数, 実測 ϵ 値から推定
凝集係数	$K(w_1, w_2)$	式 (2.3.58)	式 (2.3.53) に Batchelor による構造関数内挿式 (2. 3.56) を代入
選択関数	$P_b(w)$	$\alpha_3 G^{-n_2} w^{b_n}, b_n = 1.75$	破壊実験式, 表 2.3.2, 図 2.3.19
破碎関数	$G(w, w')$	$(w/w')^m, m = 1.25$	表 2.3.2
衝突合一確率	α_f	式 (2.3.98)	
	α_c	式 (2.3.108)	推定, $\bar{\alpha}_c = 1$ (仮定)
密度関数	ρ_e	式 (2.3.10)	実測, 実測時以外は線型補間

分布を用いた。また、表面劣化による衝突合一確率成分 α_c は急攪開始に全粒度にわたって 1 とした。したがって 2 段階攪拌の場合においても実際計算は急攪開始時からスタートし、緩攪開始時の“活性”の算出を行った。

計算は (i) β_1, β_2 の探索, (ii) 実測値・計算値の比較・検討, (iii) 感度解析・モデルで算出される構造の解析, の各段階について行った。計算に使用した計算区分は 21 であり, 2 を底とする等比級数によって分割した。計算の基礎となった式は, 式 (2.3.15) にて流動・拡散による変化項を除いた次式である。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n(w)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^w \alpha(w', w-w') K(w', w-w') n(w') n(w-w') dw \\
 & - n(w) \int_0^\infty \alpha(w, w') K(w, w') n(w') dw' - P_b(w) n(w) \\
 & + \int_w^\infty n(w') P_b(w') \frac{w'}{w} \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') dw' \quad (2.3.109)
 \end{aligned}$$

流動・拡散項のうち媒質の混合に伴う項は粒度分布変化の時間スケールが混合時間スケールに比べ長いため、無視してもその影響は小さい。また粒子の沈降による空間的偏りの程度は例えば次式で定義される Rouse 数によって評価ができる。

$$R_{ou} = \frac{v}{\kappa u_*} \quad (2.3.110)$$

ここに u_* は摩擦速度を示し、 v は粒子沈降速度を、 κ はカルマン定数である。
 u_* としては開水路と同様に考えると次式で評価してよいであろう。

$$u_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho_l} \right)^{1/2} \cong \left(\frac{\sum F_i r_i}{\rho_l \int_w r ds} \right)^{1/2} \quad (2.3.111)$$

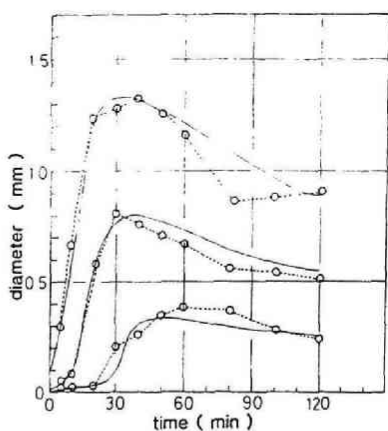
ここに $\int_w r ds$ は水槽壁面の回転軸回りの 1 次モーメント、 $\sum F_i r_i$ は回転トルクを示す。本研究で採用した標準ケース $G = 14.74$ (1/s) では上記の R_{ou} は粒径 0.1 cm の時ほぼ 0.1 程度となる。またこれ以下の粒子ではさらに沈降速度が小さくなるから、結局、粒子の沈降による空間的濃度の偏りは無視できるとした。

さて図 2.3.24 (a)～(f) はこれらの計算結果のうち体積分率で測定した 10, 50, 90% 超過径 (ふるい下) の経時変化を描いた例である。この時の β_1 , β_2 はそれぞれ 0.9875, 1.30 であり、上述の図にて計算曲線と実験結果が一致するように試行錯誤的に定めたものである。なお以下においてはこれらの値を標

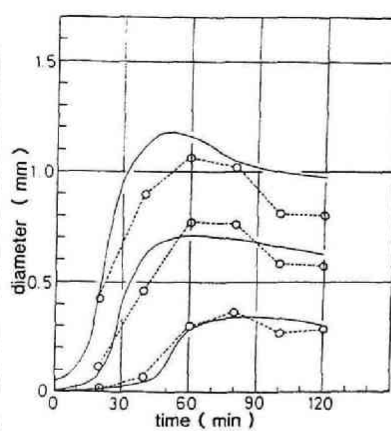
表 2.3.14 シミュレーション適合度成績

実験番号 No	Al 量 (mg/l)	G 値	破壊速度 α_2 ($\text{cm}^{1.75} \text{s}^{-3} \text{kg}^{-1}$)	粒度分布累積 誤差(1)%	粒度分布累積 誤差(2)%	フロック質
5120	3.16	14.7	6	8.6	8.9	カオリン 30mg/l フロック
5180	1.57	14.7	11	16.2	—	
5190	6.31	14.7	3	18.8	—	
5200	3.16	8.7	4	9.0	25.4	
7290	3.16	43.4	150	19.5	21.3	
6110	3.16	114	800	16.1	18.1	
10160	1.57	114	1500	9.4	—	
10151	6.31	114	300	25.1	—	湖泥 5.6mg/l アルギン酸ソーダ 2 mg/l
11280	2.56	43.4	25	16.5	20.1	
11262	2.56	16.5	4.0	18.7	19.8	
11260	2.56	11.0	2.5	17.6	21.3	

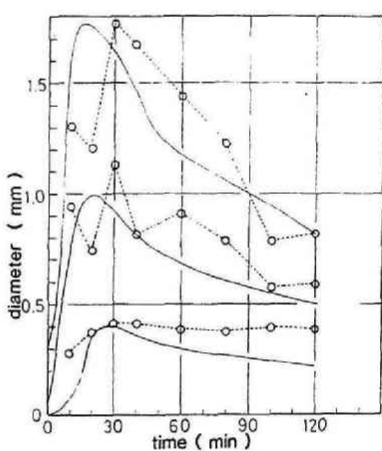
粒度分布累積誤差は実験、計算の累積粒度分布の最大絶対偏差の根 2 乗平均を示したものである。評価時刻は No 5120 - 7290 については緩攪開始後 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 120 分, No 6110-10151 については薬注後 1, 3, 5, 7, 9 分, No 11260-11280 については緩攪開始後 20, 30, 40, 60, 80, 100, 120 分である。



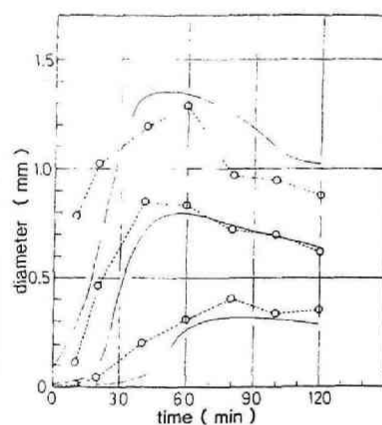
(a) G 値: 14.74, Al : 3.16 mg/l



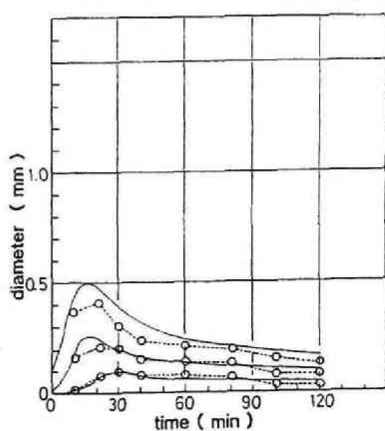
(b) G 値: 14.74, Al : 1.57 mg/l



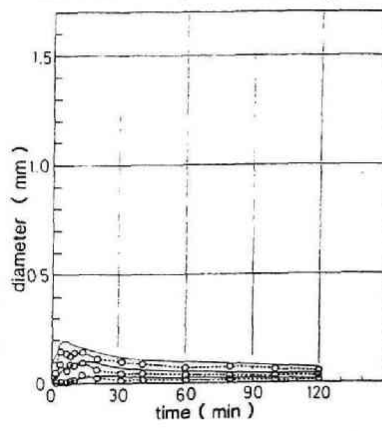
(c) G 値: 14.74, Al : 6.31 mg/l



(d) G 値: 8.68, Al : 3.16 mg/l



(e) G 値: 43.4, Al : 3.16 mg/l



(f) G 値: 114.0, Al : 3.16 mg/l

図 2.3.24 10, 50, 90%径の変化

カオリン 30 mg/l, 2 分急攪 $\beta_1 = 0.9875$, $\beta_2 = 1.30$

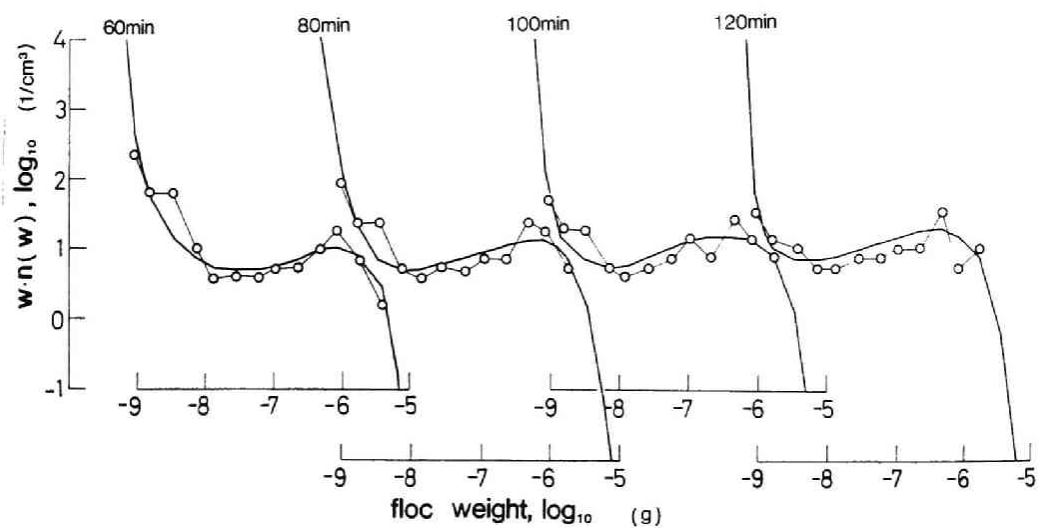
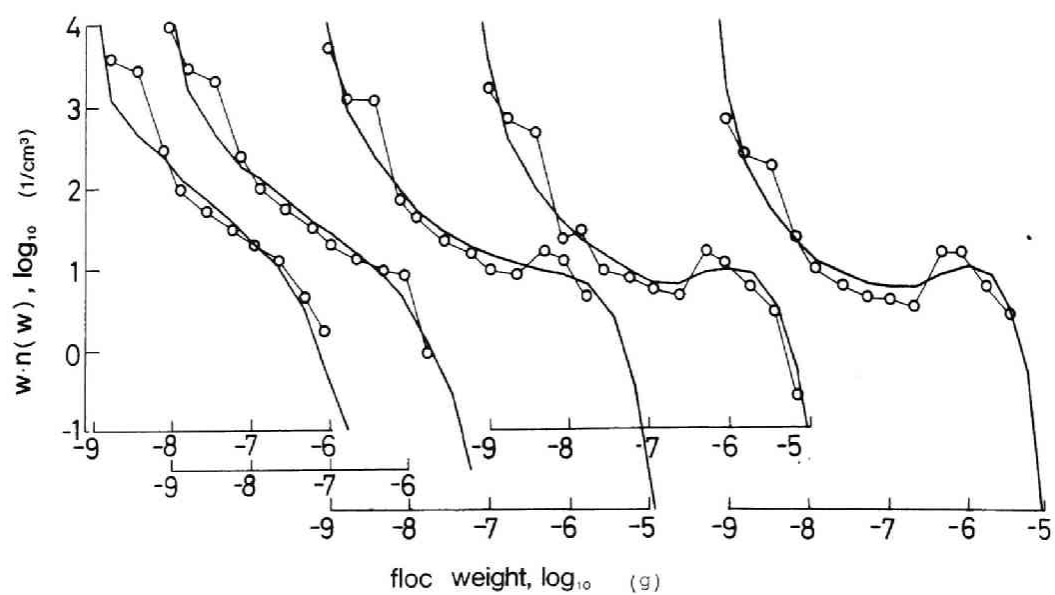


図 2. 3. 25 粒度分布の変化とそのシミュレーション

カオリン：30mg/ℓ，Al：3.16mg/ℓ，G値：14.74。

○：測定値，実線：計算値

準値とする。表 2. 3.14は累積粒度分布曲線（ふるい下曲線）の実測値と計算値の最大自乗偏差（コルモゴロフ距離の2乗）を各測定時刻について平均しその平方根の全濃度（30 mg/ℓ，5.6 mg/ℓ）に対する比率を記したものである。そのうち“粒度分布累積誤差（1）”は破壊速度 $\bar{\alpha}_2$ を試行錯誤的に定めたもの“粒度分布累積誤差（2）”は破壊実験から得た式である

$$\bar{\alpha}_2 = 5.21 \times 10^{-3} G^{2.18} \text{ (カオリン } 30 \text{ mg/ℓ, Al } 3.16 \text{ mg/ℓ) } \quad (2.3.112)$$

$$\bar{\alpha}_2 = 1.40 \times 10^{-2} G^{1.97} \text{ (湖泥 } 5.6 \text{ mg/ℓ) } \quad (2.3.113)$$

を使用して $\bar{\alpha}_2$ を定めたものである。また図 2. 3.25～2. 3.26は粒度分布変化を示した例であり質量基準で示した粒度分布，及び累積分布（ふるい下）を記している。

これらのシミュレーション結果と実験値の比較によりおよそ次の考察が可能である。

- （1）シミュレーション結果はフロック粒度の径時変化を良好に再現している。
- （2）粒度分布に対する再現性は広範囲の粒度にわたって良好な結果を得ている。

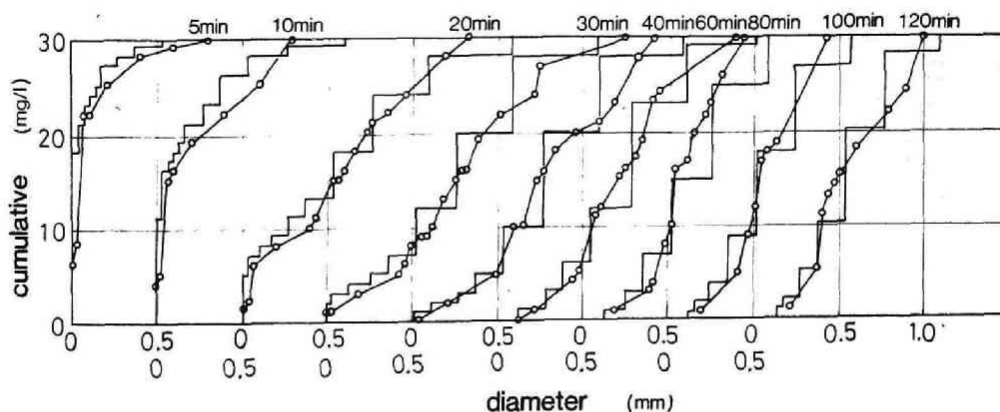


図 2. 3. 26 累積粒度分布の変化とそのシミュレーション

カオリン：30 mg/ℓ，Al：3.16 mg/ℓ，G 値：14.74，

○：測定値，実線：計算値

(3) シミュレーションにより推定された破壊速度 $\bar{\alpha}_2$ は破壊実験による実測値とほぼ一致する。(図 2.3.19)

(4) 衝突合一確率に関連し 10 μm 付近における粒子減少速度の計算値を実測のカオリン除去速度と比較してみるとピーク値付近にはかなりの相違が日立つものの、大体の挙動はほぼ一致する。(図 2.3.12)

以上の諸点は、本研究で示した凝集性粒子シミュレーションモデルの妥当性、を示す有力な材料となろう。

2.3.10 粒度分布の経時変化

凝集性浮遊粒子の粒度分布は図 2.3.25にもみられるように攪拌に伴って大きく変化する。基本的にはその挙動は凝集と破壊との釣り合いで生ずる平衡粒度分布を目指すものであろうが、両作用のバランス自体が表面活性の低下等の影響を受け時々刻々変化するから結果的には複雑な経路をたどる。フロック形成に関する初期の研究では主として攪拌初期に見られる平均粒度の立ち上がりと G 値の関係に終始していたため、こうした粒子変化特性の細部にわたるものはほとんど見られなかったが、その後、Fairら¹¹⁶、楠田ら¹⁷⁴、桜井ら¹⁷¹などの研究によってその状況は次第に明らかにされてきた。特に楠田ら¹⁷⁴はこれを粒度分布変化のみならず、密度関数、衝突合一確率の変化などの面から総合的な検討を行っている。これらの結果、及び本研究で得られた結果等を合わせると本研究で行っているようなフロック形成過程の経時変化として次のような全体像が浮かび上がる。すなわち、攪拌初期にて粒子粒度が凝集・破壊作用の釣り合いによって決まる平衡粒度に比べ非常に小さい時には、凝集効果が卓越しその結果粒度は急増する。粒子が大きくなるに伴って破壊効果が次第に重要となるが、時間がたつにつれ両者はほぼ等しい大きさになり前述した意味での平衡粒度に達す。しかるに攪拌と共に進行している“表面活性度”の低下は除々に凝集効果の相対的低下をもたらすであろうし、また同時に発生している“機械的シネレシス”は粒子をひきしめその含水率を高めるから平衡粒度分布自体が小粒度の方向に向けて漸次移動を始める。

それではこうした推測は本数値シミュレーションではどのように表現されているのであろうか。これらの点を中心に、以下にシミュレーション結果の解析

を行う。

まず式 (2.3.109) から固相質量濃度 $c(w)$ ($= w n(w)$) に関する基礎式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial c(w)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^w \alpha(w', w-w') K(w', w-w') w n(w') n(w-w') dw' & \text{①} \\
 & - c(w) \int_0^\infty \alpha(w, w') K(w, w') n(w') dw' & \text{②} \\
 & - P_b(w) c(w) & \text{③} \\
 & + \int_w^\infty c(w') \cdot P_b(w') \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') dw & \text{④}
 \end{aligned} \quad (2.3.114)$$

上式右辺の 4 つの項はそれぞれ ①凝集によって小粒子が w の粒子に，② w の粒子が凝集によってより大粒子に，③ w の粒子が破壊によって小粒子に，④大粒子が破壊によって w の粒子になる，粒度 1 単位当りの質量フラックスを示したものであるが，これらをそれぞれ $CV1$ ， $CV2$ ， $BV2$ ， $BV1$ と名付けるならば，粒子の凝集破壊過程は粒度軸上にて図 2.3.27 のように図式化できる。

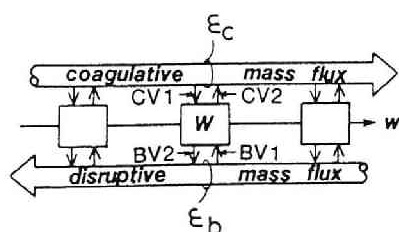


図 2.3.27 粒度軸上の質量交換

これらの量が実際場においてどのような関係をもつかを検討することによって上述した凝集性粒子の挙動解析の解釈を行うことができるが，例えば図 2.3.28 はシミュレーション結果からそれを逆算した例である。但し図中の各量はフラックスを粒度分布で除した変化速度（時定数の逆数）で示しており，いずれも部分分割法を用いて算出したものである（表 2.3.15）。

表 2.3.15 $CV1$, $CV2$, $CV3$, $CV4$ の定義・計算式

記 号	定 義 式	計 算 式
$CV1(w)$	$\frac{1}{2} \int_0^w \alpha(w', w-w') n(w-w') \frac{c(w')}{c(w)} dw'$	$\frac{1}{2 c_l (w_l - w_{l-1})} \sum_{i=1}^N c_i c_j \iint \alpha(w', w'') \frac{(w' + w'')}{w' w''} K(w', w'') dw' dw''$
$CV2(w)$	$\int_0^\infty \alpha(w, w') K(w, w') n(w') dw'$	$\frac{1}{(w_l - w_{l-1})} \sum_{i=1}^N c_i \int_{w_{l-1}}^{w_l} dw' \int_{w_i}^{w_l} \alpha(w', w'') \frac{K(w', w'')}{w'} dw''$
$BV1(w)$	$\int_w^\infty P_b(w') \frac{c(w')}{c(w)} \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') dw'$	$\frac{1}{c_l (w_l - w_{l-1})} \sum_{i=l+1}^N c_i \int_{w_{i-1}}^{w_l} dw' P_b(w', w') [G(w_l, w') - G(w_{l-1}, w')]$
$BV2(w)$	$P_b(w)$	$\frac{1}{(w_l - w_{l-1})} \int_{w_{l-1}}^{w_l} P_b(w) G(w_{l-1}, w') dw'$

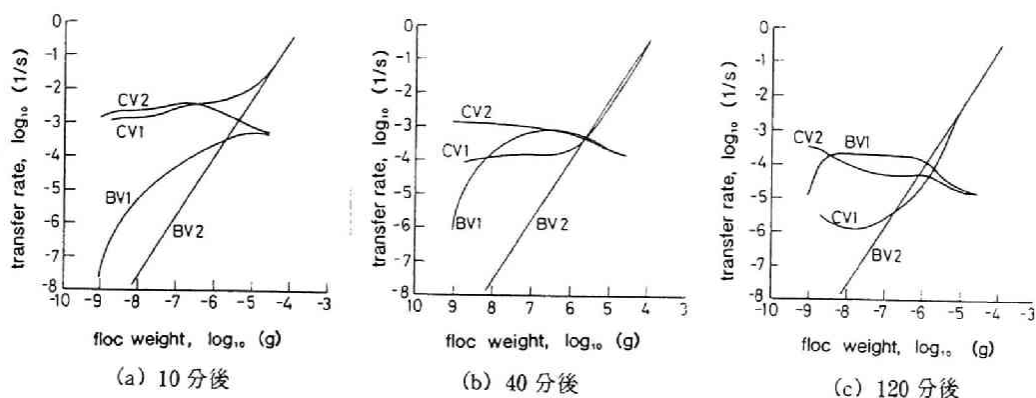


図 2.3.28 GDE 各項の大きさ

カオリン 30mg/l, Al: 3.16mg/l, G 値: 14.74

まず、凝集が卓越し平均粒度の急増が見られる（図 2.3.28 (a)）緩攪開始 10 分後（以下 $t = 10 \text{ min}$ と称す）では、ほとんどの粒度において CV （凝集速度）は BV （破壊速度）に比べ卓越した大きさをもつ。また大粒子側においては $CV1 > CV2$ 、小粒子側ではその逆であるが、これは凝集によって小粒子側の固相質量が大粒子側に移行していることを意味する。さらに $BV2$ は 3 図を通じ傾き 1.75 の直線であるが、これは選択関数の式型 $b_n = 1.75$ から明らかである。次に大粒子側の粒度がほぼピークとなる $t = 40 \text{ min}$ （図 2.3.28 (b)）

では大粒子側にて $CV1 \cong BV2$ ，中粒子にて $CV2 \cong BV1$ が成立する。すなわち凝集・破壊の速度はほとんど釣り合い部分的な平衡が成立しているものと考えられる。小粒子側では依然として $CV2$ が卓越する領域が存在し凝集による粒度の増大が行なわれている。粒度縮小期である $t=120 \text{ min}$ （図 2.3.28 (c)）では大部分の領域で破壊が凝集を上回る。すなわち，大粒子側において $BV2$ が $CV1$ を，小粒子側において $BV1$ が $CV2$ を越す。言い換えるならば，凝集による小粒子から大粒子への移行フラックスは破壊による大粒子から小粒子への移行フラックスに凌駕されている。図 2.3.29 は，これら 4 項のうち卓越する主要項を粒度との関係で俯かんしたものである。

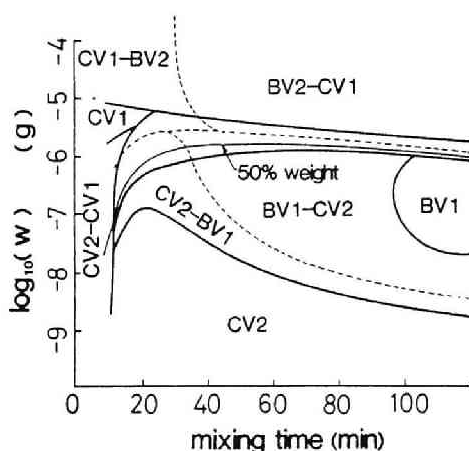


図 2.3.29 GDEにて卓越する項

他の項にくらべ 3 倍以上の項を記す。但し $CV2 - BV1$ とは $CV2$ ， $BV1$ がこの順に他項に比べ 3 倍以上大きいことを意味する。

カオリン：30mg/l，Al：3.16mg/l，G値：14.74

さらに粒度軸上を横行する総質量フラックス量に注目するために次式で ϵ_c ， ϵ_b を定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon_c &= \int_w^\infty \left[\frac{\partial c(w)}{\partial t} \right]_{Coag} dw \\ &= \int_0^w n(w') dw' \int_{w-w'}^w (w' + w'') \alpha(w', w'') K(w', w'') n(w'') dw'' \end{aligned}$$

$$+ \int_w^\infty n(w') dw' \int_0^w w'' \alpha(w', w'') K(w', w'') n(w'') dw'' \quad (2.3.115)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \int_0^w \left[\frac{\partial c(w)}{\partial t} \right]_{B_r} dw \\ &= \int_w^\infty P_b(w') G(w, w') dw' \end{aligned} \quad (2.3.116)$$

すなわち ε_c , ε_b は粒度軸上の点 w を越して凝集によって小粒子側から大粒子側に移行する質量フラックス, 及び破壊によって大粒子側から小粒子側に移行する質量フラックスであり, 特に ε_c については Friedlander¹⁹⁶⁾ が導入し Twomey¹⁹⁷⁾ が凝集質量フラックス (coagulative mass flux) と呼んだものである。したがって本節においてもこれにならい ε_b を破壊質量フラックス (disruptive mass flux) と呼ぶ。図 2.3.30 はこの ε_c , ε_b の経時変化を描いた例であり, 当初全領域にわたって卓越していた ε_c が, 攪拌と共に低下し除々に増大してきた ε_b に越される様子がわかる。

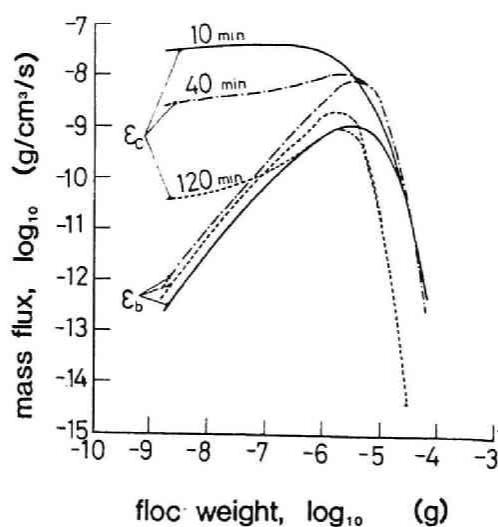


図 2.3.30 ε_c , ε_b の計算例

カオリン: 30mg/l, Al: 3.16mg/l, G 値: 14.74

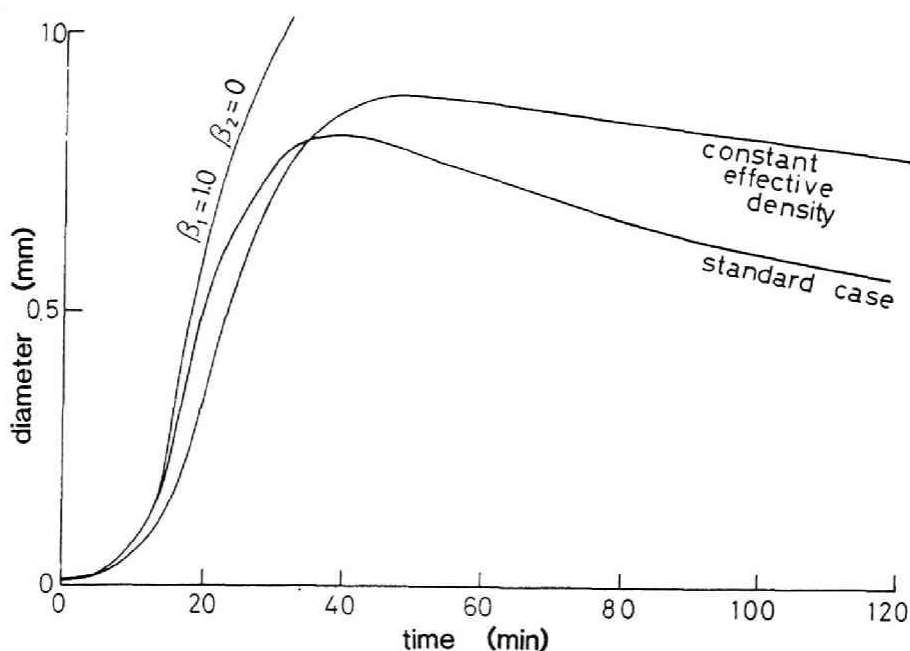


図 2.3.31 密度変化が粒径変化に及ぼす影響

標準例=カオリン：30mg/ℓ，Al：3.16mg/ℓ，
G値：14.74， d_{50} の変化を示す。

図 2.3.31 は後半期における粒度の減少に対する密度関数の影響を調べるためにこれを時間的に一定とした場合の変化を示したものである。同図中には衝突合確率の劣化なし ($\beta_1 = 1$ ， $\beta_2 = 0$) とした場合の変化も示しているが，程度の差はあるもののいずれも粒度の減小に役立っていることがわかる。

さて Friedlander^{198), 199)} は粒度分布を取り扱う上で粒度軸上のある小領域上に動的平衡状態が成立する時には次元解析等の手法によって“定常解 (steady state solution)”の推定が可能であることを示したが，本計算が対象としたフロック形成過程にも同様の領域の存在が期待される。以下そのいくつかについて検討を行なう。

(1) 凝集がやや進行し大粒子・小粒子が混在するようになると，例えば式 (2.3.115) の第 2 項 (w より小さな粒子と w より大きな粒子が凝集し w より大きな粒子が生成することによって生ずる凝集質量フラックス) が卓越かつ一定と近似でき，さらに ε_b を無視し得る領域存在の可能性がある。図 2.3.30 ($t = 10$ min) がこれに対応すると考えられ，この時の定常解を求めてみよう。 $n(w)$ に関連する次元を記すならば

$$[n(w)] = M^{-1} L^{-3}, [\varepsilon_c] = M L^{-3} T^{-1}, [K(w', w'')] = L^3 T^{-1} \quad (2.3.117)$$

となる。ここに M , L , T とはそれぞれ粒子の固相質量次元, 空間次元, 時間次元である。 l を粒径次元とし密度関数の成立を仮定すれば

$$M = l^{3-K\rho} \quad (2.3.118)$$

の関係がある。したがって $n(w)$ の候補式としては

$$n(w) \propto \varepsilon_c^{\frac{1}{2}} K(w', w'')^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{3}{2}} \quad (2.3.119)$$

$$n(d) \propto \varepsilon_c^{\frac{1}{2}} K(d', d'')^{-\frac{1}{2}} d^{-\frac{5}{2}-\frac{K\rho}{2}} \quad (2.3.120)$$

となる。いま $K(d', d'')$ として乱流凝集係数 (粒子レイノルズ数 $\ll 1$) を仮定すると

$$n(w) \propto \left(\frac{\varepsilon_c}{G}\right)^{1/2} w^{-\frac{12-3K\rho}{2(3-K\rho)}} \quad (2.3.121)$$

$$n(d) \propto \left(\frac{\varepsilon_c}{G}\right)^{1/2} d^{-\frac{36-9K\rho}{2(3-K\rho)}+2-K\rho} \quad (2.3.122)$$

を得る。上式にて $K\rho = 0$ とすれば

$$n(d) \propto \left(\frac{\varepsilon_c}{G}\right)^{1/2} d^{-4} \quad (2.3.123)$$

となるがこれは Friedlander の求めたものと一致する。またフロック等では $K\rho = 1$ として

$$n(w) \propto \frac{\varepsilon_c}{G} w^{-\frac{9}{4}} \quad (2.3.124)$$

$$n(d) \propto \frac{\varepsilon_c}{G} d^{-\frac{1}{2} - \frac{23}{4}} \quad (2.3.125)$$

を得る。すなわち含水率変化を考慮すると粒度に対する傾きがやや大きくなる。なお、この解析では衝突合一確率の考慮が欠けているが、例えばその粒度依存性を

$$\alpha(w', w'') \propto (w' \cdot w'')^{-n_\alpha} \quad (2.3.126)$$

と近似すれば、式(2.3.121)(2.3.122)は

$$n(w) \propto \frac{\varepsilon_c}{G} w^{-\frac{1}{2} - \frac{12-3K_\rho}{2(3-K_\rho)} + n_\alpha} \quad (2.3.127)$$

$$n(d) \propto \frac{\varepsilon_c}{G} d^{-\frac{1}{2} - \frac{36-9K_\rho}{2(3-K_\rho)} + 2-K_\rho + n_\alpha(3-K_\rho)} \quad (2.3.128)$$

となる。図2.3.30にて ε_c がほぼ一定である $w=10^{-8} \sim 10^{-7}$ g ($d=100 \mu\text{m}$ 程度)では n_α は0.2程度を示しこの場合には含水率変化による影響がほぼ相殺している。

(2) 凝集が進行し粒度軸の右側(大粒子側)にて破壊とほぼ釣り合うようになると前述した粒度軸上を移動する質量フラックスは模式的には図2.3.32

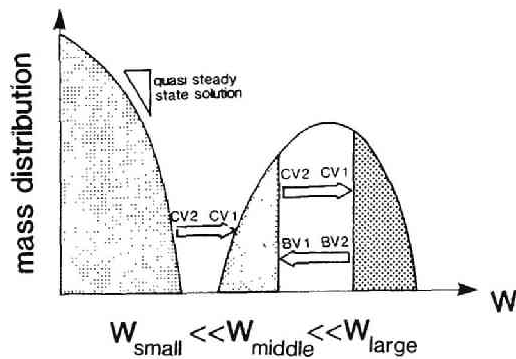


図 2.3.32 粒度分布に現われる擬似定常解

に示すようになる。すなわち (1) 粒度軸左端にて相変らず $C V 2$ が卓越する領域, (2) 粒度軸中央にて $C V 2$ と $B V 1$ が卓越する領域, (3) 粒度軸右端にて $C V 1$ と $B V 2$ が卓越する領域の 3 領域が出現する。(図 2.3.28 (b), (c)) この時刻における経時変化の時間スケールが, $C V$, $B V$ (の逆数) に比べはるかに大きいと仮定すると, 各時刻時刻では凝集と破壊の釣り合いを仮定した擬似定常的な取り扱いが可能となる。(1) の領域では上記の次元解析的検討が役立つ。(2), (3) の領域については卓越する 2 項を等置することによって半解析的な取り扱いができる。

(3) 中粒度にて $C V 2 \cong B V 1$ となる領域では表 2.3.15 から

$$\begin{aligned} c(w) \int_0^w \alpha(w, w') K(w, w') n(w') dw' \\ \cong \int_w^\infty c(w') P_b(w') \cdot \frac{\partial}{\partial w} G(w, w') dw' \end{aligned} \quad (2.3.129)$$

が成立する。乱流凝集 (粒子レイノルズ数 $\ll 1$) が卓越し, かつ対象粒径が粒子群の体積平均径に比べかなり小さいため凝集係数中の衝突半径を大粒子側の半径で近似できると仮定すると

$$\int_0^\infty dw' K(w, w') n(w') \propto G \int_0^\infty dw' w'^{\frac{3}{3-K\rho}} n(w') \quad (2.3.130)$$

を得る。さらに破壊関数型として巾乗型を, また衝突合一確率として式 (2.3.126) の型式を採用すれば式 (2.3.129) は

$$\begin{aligned} c(w) G w^{-n\alpha} \int_0^\infty w'^{\frac{3}{3-K\rho} - n\alpha} n(w') dw' \propto \\ G w^{m-1} \int_w^\infty w'^{b_n - m + 1} n(w') dw' \end{aligned} \quad (2.3.131)$$

となる。したがって $n(w)$ の不完全 p 次モーメントを

$$I(w, p) = \int_w^\infty w'^p n(w') dw' \quad (2.3.132)$$

とすれば

$$n(w) = w^{-1} c(w) \propto \frac{I(w, b_n - m + 1)}{I(0, \frac{3}{3-K\rho} - n_\alpha)} G^{n_2 - 1} w^{m-2+n_\alpha} \quad (2.3.133)$$

を得る。破壊実験より得た $m = 1.25$, $b_n = 1.75$ 及び図 2.3.33 から得た $n_\alpha \cong 0.5$ をほぼ一定として $wn(w)$ の w に対する傾きとして 0.75 を得る。

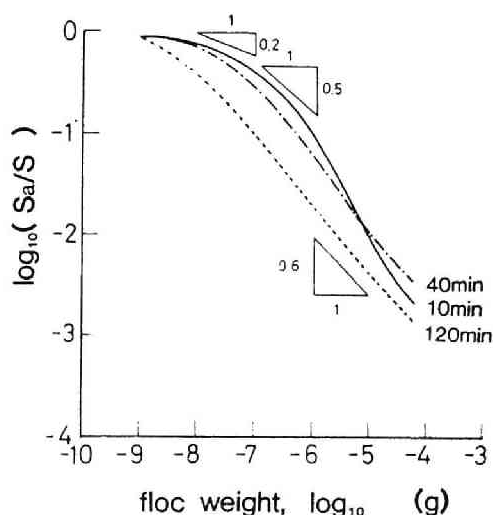


図 2.3.33 活性面 S_a の分布

カオリン：30mg/ℓ，Al：3.16mg/ℓ， G 値：14.74

実際の粒度分布では 0.75 のように大きな正勾配をもった領域は現われていないが，他領域の勾配との関連で粒度分布上に 1 つのモードを形成することがわかる。（例えば図 2.3.25， $t = 40 \text{ min}$ ， $w = 10^{-6} \text{ g}$ 付近に見られるピーク）また衝突合一確率を固定し攪拌時間を長大にすることによって得られる定常解ではこの領域の存在が明確に示される。図 2.3.34 は α_f を粒径によらず一定とした場合の計算結果である。この時は $n_\alpha = 0$ ，であり $wn(w)$ の傾きは 0.25 となる。 $w = 10^{-7} \text{ g}$ 以下にこの領域が存在している。

(4) 大粒度にて $CV1 \cong BV2$ となる領域では表 2.3.15 から

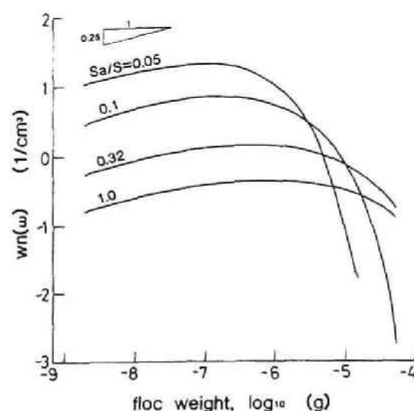


図 2.3.34 活性面の比 S_a/S を一定にした時の定常粒度分布
 カオリン: $30\text{mg}/\ell$, Al: $3.16\text{mg}/\ell$, G 値: 14.74

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^w \alpha(w', w-w') K(w', w-w') n(w') n(w-w') dw' \\ &= P_b(w) \cdot n(w) \end{aligned} \quad (2.3.134)$$

$K(w', w'')$, $P_b(w)$ に乱流凝集係数 (粒子レイノルズ数 $\ll 1$), 及び巾関数を採用し, $\alpha(w', w-w')$ に式 (2.3.126) を代入すれば

$$\begin{aligned} & G \int_0^w \left\{ w' \cdot (w-w') \right\}^{-n_\alpha} \cdot \left\{ (w-w')^{\frac{1}{3-K_\rho}} + w'^{\frac{1}{3-K_\rho}} \right\}^3 \cdot n(w') n(w-w') dw' \\ & \propto G^{n_2} W^{b_n} n(w) \end{aligned} \quad (2.3.135)$$

式 (2.3.135) の解として例えば

$$n(w) \propto w^a \exp(-A_1 w) \quad (2.3.136)$$

とすると

$$a = b_n + 2 n_\alpha - \frac{6 - K_\rho}{3 - K_\rho} \quad (2.3.137)$$

が必要となる。 (A_1 は任意)

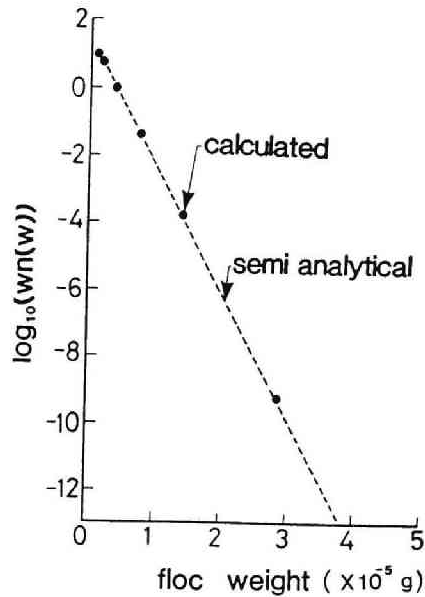


図 2.3.35 大粒径側の粒度分布

式 (2.3.136) との比較

点線：式 (2.3.136) 黒点：シミュレーション計算値

カオリン：30mg/ℓ，Al：3.16mg/ℓ，

G 値：14.74，120 分後

すなわち粒度分布型は粒度が大きくなるにつれて指数的に減衰する。計算結果でもこの傾向がうかがわれ，図 2.3.35 に $b_n = 1.75$ ， $n_\alpha = 0.6$ ， $K_\rho = 1$ とした時の計算値と式 (2.3.136) に示される曲線とを描いたものを示す (A_1 は大粒子側の計算結果から定めた)。

以上，本節においては粒度分布の経時変化について前節で示した計算結果を中心に検討を行なった。その結果，本研究で取り扱ったフロック形成過程は，(1) 初期の凝集卓越期及び後半の凝集・破壊拮抗期に分離できること，(2) 各時期において粒度軸上の小領域に局所的“平衡領域”が存在することを示した。凝集・破壊の拮抗は固相質量基準の粒度分布に 1 つのモードを作り，初期基本粒子によって構成される小粒度側のモードと共にいわゆる多峰 (bimodal) 分布を形成するが (図 2.3.32)，山の間の質量交換は左側の山 (小粒度側) から右側の山 (大粒度側) への一方的な移行が卓越し Parker ら¹⁶⁸⁾ が推定するような両峰間の相互的な物質交換は見られなかった。但しこうした事情は破壊様式の仮定に深く係っており分布の bimodal 性を含め現段階ではフロック形成過程全般に対し以上の結果が適用できるかは明らかではない。

引用文献

- 1) 松岡譲・幸前清孝 (1981): 傾斜板沈殿池の除去効率に関するシミュレーション, 土木学会第36回年次学術講演会講演概要集, II-140, 279-280.
- 2) Drew, D. A. (1983): Mathematical modeling of two-phase flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 261-291.
- 3) Emery, A. R. (1968): Preliminary observations on coral reef plankton. *Limnol. Oceanogr.*, **13**, 293-303.
- 4) Clutter, R. I. (1969): The microdistribution and social behavior of some pelagic mysid shrimp. *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.*, **3**, 125-155.
- 5) 本間仁・堀川清司・間淵昭次 (1963): 浮遊砂濃度の測定法について, 土木学会第18回年次講演会講演概要集, 第2部, 151-154.
- 6) Bhattacharaya, P. K., Glover, J. R., and Kennedy, J. F. (1969): An electro-optical probe for measurement of suspended sediment concentration. *Proc. 13th Cong. IAHR, Kyoto, Vol. 2*, 241-250.
- 7) 道上正規・白川清 (1971): 浮遊砂に関する研究(2) - 濃度の光学的測定法 - 京大防災研究所年報, **14 B**, 251-258.
- 8) 松本幹治・森芳郎 (1972): 光透過法による粒径と濃度の同時測定. 光透過法による粒子挙動の確率的検討, *化学工学*, **36** (10), 1137-1143.
- 9) Anderson, T. B., and Jackson, R. (1967): A fluid mechanical description of fluidized beds, equation of motion. *Ind. Eng. Chem.*, **6** (4), 527-539.
- 10) Rietema, K., and Akker, H. E. A. (1983): On the momentum equations in dispersed two-phase systems. *Int. J. Multiphase Flow*, **9** (1), 21-36.
- 11) Sha, W. T., and Soo, S. L. (1979): On the effect of $P \propto$ term in multiphase mechanics. *Int. J. Multiphase Flow*, **5**, 153-158.

- 12) Gidaspow, D. (1974): Modeling of two-phase flow, 5th Int. Heat Transfer Conference, **7**, 163 - 169.
- 13) Jakson, R. (1971): Fluid mechanical theory, in Fluidization, eds. Davison J. F. and Harrison, D., Academic Press, 65 - 119, New York.
- 14) Truesdell, C. and Toupin, R. (1960): The classical field theories, in Handb. Phys. ed. Flugge, S., Vol III / 1, Springer, Berlin.
- 15) Drew, D. A., and Lahey, R. T. Jr. (1979): Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations, Int. J. Multiphase Flow, **5**, 243 - 264.
- 16) Rietema, K. (1982): Science and technology of dispersed two-phase systems—I and II, Chem. Eng. Sci., **37** (8), 1125 - 1150.
- 17) Ward, S. G. (1955): Properties of well-defined suspensions of solids in liquids, J. Oil & Colour Chemists' Assoc., **38** (9).
- 18) Schugerl, K., Merz, M., and Fetting, F. (1961): Rheologische Eigenschaften von gasdurchströmten Fließbettsystemen, Chem. Eng. Sci., **15**, 1 - 38.
- 19) Soo, S. L. (1967): Fluid dynamics of multiphase systems, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Massachusetts.
- 20) Dick, R. I., and Ewing, B. B. (1967): The rheology of activated sludge, J. Water Pollut. Control Fed., **39** (4), 543 - 560.
- 21) Gabor, J. D. (1972): On the mechanics of fluidized particle movement, Chem. Eng. J., **4**, 118 - 126.
- 22) Ishii, M. (1975): Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow, Eyralles, Paris.

- 23) 石井勉 (1965) : 固液系流動層の挙動. 化学工学, **29** (11), 915 - 921.
- 24) Batchlor, G. K. (1974) : Transport properties of two-phase materials with random structure. Ann. Rev. Fluid Mech., **6**, 227 - 255.
- 25) Carman, P. C. (1937) : Fluid flow through granular beds. Trans. Institute of Chemical Engrs., **15**, 150, London.
- 26) DEGREMONT (1979) : Water treatment handbook. Halsted Press, Paris.
- 27) Hazen, A. (1904) : On sedimentation. Trans. Amer. Soc. Civil Eng., **53**, 45-54.
- 28) Camp, T. R. (1946) : Sedimentation and design of settling tanks. Trans. Amer. Soc. Civil Eng., **111**, 895-914.
- 29) Purchas, D. B. (1977) : Solid/liquid separation equipment scale-up. Upland Press.
- 30) Michaels, A., and Bolger, J. (1962) : Settling rates and sediment volumes of flocculated kaolin suspensions. Ind. Eng. Chem. Fundam., **1** (1), 24-33.
- 31) Vesilind, P. A. (1969) : Discussion of "Evaluation of activated sludge thickening theories", by Dick, R. I., and Ewing, B. B., Proc. ASCE San. Eng. Div., **94** (SA 1), 185-191.
- 32) Dixon, D. C., Souter, P., and Buchanan, J. E. (1976) : A study of inertial effects in sedimentation. Chem. Eng. Sci., **31**, 737-740.
- 33) Fitch, B. (1979) : Sedimentation of flocculent suspensions, State of the Art, AICh J., **25** (6), 913-930.
- 34) 松岡譲・村田康弘・住友恒・岩井重久 (1979) 泥の圧縮・沈降に関する

数値解析. 第15回衛生工学研究討論会講演論文集, 34 - 39.

- 35) Terzaghi, K. (1948) : Theoretical soil mechanics. John Wiley, New York.
- 36) 川島普 (1955) : Sludge 層沈降機構批判とその応用. 水道協会雑誌, **247**, 9-16.
- 37) Ingersoll, A. C., McKee, J. E., and Brooks, N. H. (1955) : Fundamental concepts of rectangular settling tanks. Trans. ASCE, **120**, 1179-1204.
- 38) 矢木栄・山崎弥三郎 (1960) : 沈殿濃縮における圧縮脱水過程についての基礎的研究. 化学工学, **24** (2), 81-92.
- 39) Shirato, M., Kato, H., Kobayashi, K., and Sakazaki, H. (1970) : Analysis of settling of thick slurries due to consolidation. J. Chem. Eng. Japan, **3** (1), 98-104.
- 40) 栗谷陽一・藤崎一裕 (1978) : 圧縮沈降に関する一考察. 土木学会第33回年次講演会講演概要集, II - 183, 353-354.
- 41) Kos, P. and Adrian, D. D. (1975) : Transport phenomena applied to sludge dewatering. Proc. ASCE, Environ. Eng. Div., **101** (EE6), 947-965.
- 42) 三笠正人 (1963) : 軟弱粘土の圧密一新圧密理論とその応用. 鹿島研究所出版会, 東京.
- 43) Kynch, G. J. (1952) : A theory of sedimentation. Trans. Faraday Society, **48**, 166-176.
- 44) Coe, H. S. and Clevenger, G. H. (1916) : Methods for determining the capacities of slime-settling tanks, Trans. Amer. Inst. Min. Engrs., **55**, 356-384.
- 45) Shannon, P. T., Stroupe, E., and Tory, E. M. (1963) : Batch and continuous thickening. Ind. Eng. Chem. Fundam., **2** (3), 203-211.
- 46) Shannon, P. T., DeHaas, R. D., Stroupe, E., and Tory, E. M. (1964) : Batch and continuous thickning. Ind. Eng. Chem., Fundam., **3** (3), 250-260.

- 47) Shannon, P. T., and Tory, E. M. (1965) : Settling of slurries. *Ind. Eng. Chem.*, **57**, 18-25.
- 48) Shannon, P. T., and Tory, E. M. (1966) : The analysis of continuous thickening. *Trans. Society of Mining Eng.*, 375-382.
- 49) Wallis, G. B. (1969) : One-dimensional two-phase flow, McGraw-Hill, New York.
- 50) Talmage, W. P., and Fitch, E. B. (1955) : Determining thickener unit areas. *Ind. Eng. Chem.*, **47** (1), 38-41.
- 51) 吉岡直哉・堀田豊・田中晋・内藤悟・津上信一 (1957) : 均質凝集性スラリーの連続沈降濃縮. *化学工学*, **21** (2), 66-74.
- 52) Hassett, N. J. (1958) : Design and operation of continuous thickeners. *Industrial Chemist*, **34**, 489-494.
- 53) Lighthill, M. J., and Whitham, G. B. (1955) : On kinematic waves: I. Flood movements in long rivers. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **229**, 281-316.
- 54) Courant, R., and Friedrichs, K. O. (1948) : Supersonic flow and shock waves. Wiley-Interscience, New York.
- 55) Scott, K. J. (1968) : Experimental study of continuous thickening of flocculated solica slurry. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **7** (4), 582-595.
- 56) Tory, E. M., and Shannon, P. T. (1965) : Reappraisal of the concept of settling in compression. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **4** (2), 194-204.
- 57) Tiller, F. M. (1981) : Revision of Kynch sedimentation theory. *AIChE J.*, **27** (5), 823-829.
- 58) Dixon, D. C. (1981) : Thickener dynamic analysis, accounting for compression effects. *Chem. Eng. Sci.*, **36**, 499-507.
- 59) Dixon, D. C. (1982) : Compression effects in batch

- settling tests. Proc. ASCE Environ. Eng. Div., **108** (EE6), 1171-1191.
- Dixon, D. C. (1977): Momentum-balance aspects of free-settling theory. I. Batch thickening. Separation Science, **12** (2), 171-191.
- Dixon, D. C. (1977): Momentum-balance aspects of free settling theory. II. Continuous, steady-state thickening. Separation Science, **12** (2), 193-203.
- Dixon, D. C. (1978): Momentum-balance aspects of free-settling theory. III. Transient compression resistance. Separation Science and Technology, **13** (9), 753-766.
- Fitch, B. (1966): Current theory and thickener design, Ind. Eng. Chem., **58** (10), 18-28.
- Dick, R. I. (1968): Thickening characteristics of activated sludge, 4th International Conference on Water Pollution Research, II-18, Prague.
- Scott, K. J. (1970): Continuous thickening of flocculated suspensions. Ind. Eng. Chem. Fundam., **9** (3), 422-427.
- 楠田哲也・古賀憲一・栗谷陽一 (1980): 汚泥の沈降濃縮に関する研究. 土木学会論文報告集, **294**, 59-71.
- Smiles, D. E. (1976): Sedimentation: Integral behaviour. Chem. Eng. Sci., **31**, 273-275.
- Kos, P. (1977): Gravity thickening of water treatment plant sludge. J. Am. Water Works Assoc., **69** (5), 272-282.
- Kos, P. (1977): Continuous gravity thickening of sludge. Prog. Wat. Tech. **9**, 291-309.
- Kos, P. (1978): Gravity thickening of sludges. Ph. D. Thesis, Univ. Massachusetts, Amherst, Massachusetts.
- Richtmyer, R. D. and Morton, K. W. (1967): Difference methods for initial-value problems. J. Wiley, New York.

- 72) Rubin, E. L., and Burstein, S. Z. (1967): Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas. *J. Comput. Phys.*, **2**, 178-196.
- 73) MacCormack, R. W. (1969): The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA paper*, No. 69-354.
- 74) Lerat, A., and Peyrat, R. (1973): *R. Acad. Sci.*, **A277**, 363-366, 78) から引用.
- 75) Warming, R. F., Kutler, P., and Lomax, H. (1973): *AIAA J.* **11**, 189-196.
- 76) McGuire, G. R., and Morris, J. L. (1973): *J. Comput. Phys.*, **11**, 531-549.
- 77) 矢嶋信男・野木達夫 (1977): 発展方程式の数値解析 岩波書店, 東京.
- 78) Peyrat, R., and Taylor, T. D. (1982): *Computational methods for fluid flow*. Springer Verlag, New York.
- 79) Roberts, E. J. (1949): Thickening—art or science. *Mining Engineering*, **1**, 61-64.
- 80) 吉岡直哉・堀田豊・田中晋 (1955): 均質スラリーの回分沈降における諸特性. *化学工学*, **19** (12), 616-626.
- 81) Behn, V. C., and Liebman, J. C. (1963): Analysis of thickener operation. *Proc. ASCE San. Eng. Div.*, **89** (SA3), 1-15.
- 82) 穂積準 (1977): 凝集性スラリーの圧縮沈降特性に関する研究 (I)—圧縮沈降速度の検討および初高, 初濃度の影響. *水道協会雑誌*, **514**, 2-16.
- 83) Dick, R. I., and Ewing, B. B. (1967): Evaluation of activated sludge thickening theories. *Proc. ASCE San. Eng. Div.*, **93** (SA4), 9-29.
- 84) Javaheri, A. R., and Dick, R. I. (1969): Aggregate size variations during thickening of activated sludge. *J. Water Pollut. Control Fed.*, **41** (5), Part 2, R-197.

- 85) Duncan, W. K., and Kawata, K. (1968): Discussion of "Evaluation of activated sludge thickening theories" by Dick, R. I., and Ewing, B. B., Proc. ASCE San. Eng. Div., **94** (SA2), 431-433.
- 86) Gaudin, A. M., and Fuerstenau, M. C. (1962): Experimental and mathematical model of thickening. Trans. Society of Mining Engineers, **223**, 122-129.
- 87) Scott, K. J. (1966): Mathematical Models of mechanism of thickening. Ind. Eng. Chem. Fundam., **5** (1), 109-113.
- 88) Richardson, J. F., and Zaki, W. N. (1954): Sedimentation and fluidization, Part 1. Trans. Inst. Chem. Eng. **32**.
- 89) Steinour, H. H. (1944): Rate of sedimentation. Ind. Eng. Chem., **36** (7), 618-624, **36** (9), 840-847, **36** (10), 901-907.
- 90) Shin, B. S., and Dick, R. I. (1980): Applicability of Kynch theory to flocculent suspensions. Proc. ASCE Environ. Eng. Div., **106** (EE3), 505-526.
- 91) Shin, B. S., and Dick, R. I. (1974): Effect of permeability and compressibility of flocculent suspensions on thickening. 7th International Conference on Water Pollution Research, Paris, 9c (1).
- 92) Peynircioglu, A. H. (1973): Performance of very soft muds under very light loads and consolidation of a muddy bottom under a wide sand fill. Proc. 8th ICSMFE, 2.2, 159-163.
- 93) 矢野弘一郎・今井五郎・鶴谷和夫 (1976): 粘木の沈降実験, 第12回土質工学研究発表会講演集, 231-234.
- 94) Dixon, D. C. (1980): Effect of sludge funneling in gravity thickeners. AIChE. J., **26**, 471-477.

- 95) 大坪国順 (1983): 底泥の物性及び流送特性に関する実験的研究. 国立公害研究所研究報告第42号.
- 96) Baker, M. N. (1934): Sketch of history of water treatment, J. Am. Water Works Assoc., **26**, 902.
- 97) Edzwald, J. K., Upchurch, J. B., and O'Melia, C. R. (1974): Coagulation in estuaries, Environ Sci. Technol. **8** (1), 58-63.
- 98) Lerman, A. (1979): Geochemical processes, Water and sediment environments, John Wiley & Sons, New York.
- 99) 楠田哲也・古賀憲一・栗谷陽一 (1978): 塩水中における粘土粒子の凝集, 用水と廃水, **20** (3), 31-36.
- 100) O'Melia, C. R. (1980): Aquasols: the behavior of small particles in aquatic system, Environ. Sci. Technol., **14** (9), 1052-1060.
- 101) Sholkovitz, E. R. (1976): Flocculation of dissolved organic and inorganic matter during the mixing of river water and seawater, Geochim Cosmochim. Acta, **40**, 831-845.
- 102) Hurt, J. R. (1980): Prediction of oceanic particle size distributions from coagulation and sedimentation mechanisms, Particulates in water, characterization, fate, effects, and removal, ed. Kavanaugh, M. C. and Leckie, J. O. Advances in Chemistry Series, **189**, American Chemical Society, Washinton D. C., 243-257.
- 103) 熊谷幹郎・西村肇 (1981): 海上空港建設に伴う濁りの発生と水中濃度の予測. 1981年度日本海洋学会秋季大会講演要旨集, 265-266.
- 104) 安立重昭 (1982): 塩水中におけるベントナイトのフロック形成について, 港湾技研資料, No. 421, 運輸省港湾技術研究所, 横須賀.
- 105) Smoluchowski, M. (1971) Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik Kolloider Lösungen, Z. physic. Chem., **92**, 129-168.

- 106) Müller, V. H. (1928): Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. Die Koagulation von Stäbchen- und Blättchenkolloiden; die Theorie beliebig polydisperser Systeme und der Strömungskogulation. Kolloidchemische Beihefte, **27**, 223-250.
- 107) Bass, L. (1954): Zur Theorie der Mahlvorgänge. Z. Angew. Math. Phys., **5**, 283-292.
- 108) Austin, L. G., and Klimpel, R. R. (1964) The theory of grinding operations. Ind. Eng. Chem., **56**, 18-29.
- 109) 松岡譲 (1982): 浄水プロセスにおける数値モデル. 水質汚濁研究, **5** (2), 115-125.
- 110) Hidy, G. M. and Brock, J. R. (1970): The dynamics of aerocolloidal systems. Pergamon, Oxford.
- 111) Swift, D. L., Friedlander, S. K. (1964): The coagulation of hydrosols by brownian motion and laminar shear flow. J. Colloid Sci., **19**, 621-647.
- 112) Drake, R. L. (1976): Similarity solutions for homogeneous and nonhomogeneous aerosol balance equations. J. Colloid Interface Sci., **57** (3), 411-423.
- 113) Drake, R. L. (1972): Topics in current aerosol research. eds. Hidy, G. M. and Brock, J. R., **3** (2), Pergamon, Oxford.
- 114) White, W. H. (1982): On the form of steady-state solutions to the coagulation equations. J. Colloid Interface Sci., **87** (1), 204-208.
- 115) Pulvermacher, B. and Ruckenstein, E., (1974): Similarity solutions of population balances. J. Colloid Interface Sci., **46** (3), 428-436.
- 116) Fair, G. M., and Gemmell, R. S., (1963): Some aspects of orthokinetic flocculation. Progress report on U.

- S. Public Health Service Research Grant WP-00024,
Div. Engineering and Applied Physics, Harvard
University, Cambridge, Massachusetts.
- 117) 丹保憲仁 (1965): フロック形成過程の基礎的研究 (I) — Conventional 型におけるフロック形成 —. 水道協会雑誌, **372**, 10-19.
 - 118) 森芳郎・吉沢昭宣 (1968): 沈降性懸濁液中の凝集—速度差による捕集—. 化学工学, **32**, 1233-1240.
 - 119) 楠田哲也・古賀憲一・栗谷陽一 (1977): 凝集沈降による成長フロックの粒度分布の相似性. 九大工学集報, **50** (1), 13-19.
 - 120) 宇治貞宏 (1978): フロッキュレータにおけるフロックの成長破壊に関する研究. 修士学位論文. 京都大学工学部衛生工学教室.
 - 121) Lindauer, G. C., and Castleman, A. W. Jr. (1971): Behavior of aerosols undergoing Brownian coagulation and gravitational settling in closed systems. *Aerosol Sci.*, **2**, 85-91.
 - 122) Lawler, D. F., O'Melia C. R. and Tobiasson J. E. (1980): Integral water treatment plant design from particle size to plant performance. Particulates in water characterization, fate, effect, and removal. (eds.) Kavanaugh, M. C., and Leckfe, J. O., *Advances in Chemistry Series*, **189**, American Chemical Society, Washington D. C., 353-388.
 - 123) Tolfo, F (1977): A simplified model of aerosol coagulation. *J. Aerosol Sci.*, **8**, 9-19.
 - 124) Gelbard, F., and Seinfeld, J. H. (1978): Numerical solution of the dynamic equation for particulate systems. *J. Comput. Phys.*, **28**, 357-375.
 - 125) Gelbard, F., Tambour, Y., and Seinfeld, J. H. (1980): Sectional representations for simulating aerosol dynamics. *J. Colloid Interface Sci.*, **76** (2), 541-556.

- 126) 丹保憲仁・高桑哲男・船水尚行 (1979) フロック形成過程の数値解析. 第15回衛生工学研究討論会講演論文集, 土木学会衛生工学委員会, 1-6.
- 127) 古賀憲一・萬久光・栗谷陽一・楠田哲也 (1980): 凝集沈降に関する数値計算と衝突・付着総合効率について. 第16回衛生工学研究討論会講演論文集, 土木学会衛生工学委員会, 8-14.
- 128) Finlayson, B. A. (1972): The method of weighted residuals and variational principles. Academic Press, New York.
- 129) 丹保憲仁・渡辺義公 (1972): フロッキュレーターの合理的設計 (Ⅲ) 一数值解による理論の展開一. 水道協会雑誌, **449**, 2-17.
- 130) Nakajima, Y., and Tanaka, T. (1973): Solution of batch grinding equation. IEC Process Des. Dev., **12** (1), 23-25.
- 131) Camp, T. R., and Stein, P. C. (1943): Velocity gradients and internal work in fluid motion. J. Boston Society Civil Engrs., **30**, 219-237.
- 132) 岡本幸道・西川正史・橋本健治 (1979): 攪拌槽内のエネルギー消散速度分布とその液-液分散および固-液物質移動への影響. 化学工学論文集, **5** (4), 410-415.
- 133) 栗谷陽一・楠田哲也・古賀憲一 (1975): フロック形成槽内のG値の空間分布がその形成におよぼす影響. 第26回水道研究発表会, 日本水道協会, 222-224.
- 134) Glasgow, L. A. (1977): Particle deaggregation phenomena. Ph. D. Thesis, Univ. of Missouri, Columbia.
- 135) 平井雄二 (1979): フロック破壊過程における粒度分布に関する研究. 修士学位論文, 京都大学工学部衛生工学教室.
- 136) Pandya, J. D., and Spielman, L. A. (1982): Floc breakage in agitated suspensions: Theory and data processing strategy. J Colloid Interface Sci., **90** (2), 517-531.

- 137) Smith, D. K. W., and Kitchener, J. A. (1978) : The strength of aggregates formed in flocculation, Chem. Eng. Sci., **33**, 1631-1636.
- 138) Boadway, J. D. (1978) : Dynamics of growth and breakage of alum floc in presence of fluid shear, Proc. ASCE Environ. Eng. Div., **104** (EE5), 901-915.
- 139) Ludwig Engineering and Science Research Foundation (1967) : Floc strength and filterability of pretreated water. Annual Report, Project Year 1966-1967, Research Grant WP-00813-01. U. S. Federal Water Pollution Control Administration.
- 140) Matsuo, T., and Unno, H. (1981) : Forces acting on floc and strength of floc. Proc. ASCE Environ. Eng. Div., **107** (EE3), 527-545.
- 141) Quigley, J. E., and Spielman, L. A. (1977) : Strength properties of liquid borne flocs. Motion Picture, Project No. A-036-DEL, Water Resources Center, Univ. of Delaware, Newark.
- 142) Glasgow, L. A., and Hsu, J. P. (1982) : An experimental study of floc strength, AIChE J., **28** (5), 779-785.
- 143) Taylor, G. I. (1934) : The formation of emulsions in definable fields of flow. Proc. R. Soc. London Ser. A, **146**, 501.
- 144) 中島耀二・田中達夫 (1974) : 粉碎方程式の解析解について. 粉碎, **19**, 2-11.
- 145) Gaudin, A. M., and Meloy, T. P. (1962) : Model and a comminution distribution equation for single fracture, AIME Transactions, **223**, 40-43.
- 146) 合田健・植松邦彦 (1956) : 薬品混和の水理学的研究, 土木学会誌, **41** (3), 14-17.
- 147) 丹保憲二 (1961) : 薬品沈殿におけるフロッキュレーターの水理. 水道

協会雑誌, **362**, 13-24.

- 148) Argaman, Y., and Kaufman, W. J. (1968) : Turbulence in orthokinetic flocculation. SERL Report No. 68-5, Sanitary Engineering and Research Laboratory, College of Engineering and School of Public Health, Univ. of California, Berkeley.
- 149) Saffman, P. G., and Turner, J. S. (1956) : On the collision of drops in turbulent clouds, *J. Fluid Mech.*, **1**, 16-30.
- 150) Batchelor, G. K. (1951) : Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47**, 359-374.
- 151) East, T. W. R., and Marshall, J. S. (1954) : *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **80**, 26.
- 152) Panchev, S. (1971) : Random functions and turbulence. Pergamon, Oxford.
- 153) Abrahamson, J. (1975) : Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid. *Chem. Eng. Sci.*, **30**, 1371-1379.
- 154) Levich, V. G. (1962) : Physicochemical hydrodynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- 155) Kolmogoroff, A. N. (1941) : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *C. R. Acad. Sci.*, **30**, 301-305.
- 156) Stewart, R. W., Wilson, J. R., and Burling, R. W. (1970) : Some statistical properties of small scale turbulence in an atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **41**, 141-152.
- 157) Lal, D., and Lerman, A. (1975) : Size spectra of biogenic particles in ocean water and sediments. *J. Geophys.*

- Res., **80**, 423-430.
- 158) Bagster, D. F., and Tomi, D. (1974): The stresses within a sphere in simple flow fields. Chem. Eng. Sci., **29**, 1773-1783.
 - 159) Tomi, D., and Bagster, D. F. (1975): A model of floc strength under hydrodynamic forces. Chem. Eng. Sci., **30**, 269-278.
 - 160) Thomas, D. G. (1963): Transport characteristics of suspensions. AIChE J., **9**, 310-316.
 - 161) Thomas, D. G. (1964): Turbulent disruption of flocs in small particle size suspensions. AIChE J. **10** (4), 517-523.
 - 162) Camp, T. R. (1968): Floc volume concentration. J. Am. Water Works Assoc., **60** (6), 656-673.
 - 163) Healy, T. W., and LaMer, V. K. (1964): The energetics of flocculation and redispersion by polymers. J. Colloid Sci., **19**, 323-332.
 - 164) 丹保憲二・山田浩一・穂積準 (1970): フロック強度に関する研究. 水道協会雑誌, **427**, 4-15.
 - 165) 松尾友矩 (1974): フロックの破壊機構と強度に関する研究. 土木学会論文報告集, **229**, 31-39.
 - 166) 楠田哲也 (1973): フロックの形成条件がその性質におよぼす影響. 土木学会論文報告集, **217**, 33-39.
 - 167) Delichatsios, M. A., and Probstein, R. F. (1975): Scaling laws for coagulation and sedimentation. J. Water Pollut. Control Fed., **47** (5), 941-949.
 - 168) Parker, D. S., Kaufman, W. J., and Jenkins, D. (1972): Floc breakup in turbulent flocculation processes. Proc. ASCE San. Eng. Div., **98** (SA1), 79-99.
 - 169) 住友恒・宇治貞宏・平井雄二 (1978): フロックの破壊に関する基礎的研究. 京都大学工学部衛生工学教室.

- 170) Ham, R. K., and Christman, R. F. (1969): Agglomerate size changes in coagulation, Proc. ASCE San. Eng. Div., **95** (SA3), 481-502.
- 171) 桜井正明・原納淑郎 (1980): ミクロセルローズ分散系のフロック成長過程, 化学工学論文集, **6** (3), 281-287.
- 172) 丹保憲仁・小笠原光彦 (1970): 管路によるフロック形成の研究, 水道協会雑誌, **426**, 29-39.
- 173) 丹保憲仁・渡辺義公 (1971): フロッキュレーターの合理的設計, 水道協会雑誌, **441**, 2-14.
- 174) 古賀憲一・栗谷陽一・楠田哲也 (1979): フロックの基礎的性質に及ぼす攪拌条件の影響, 水道協会雑誌, **535**, 39-45.
- 175) Rumpf, H. (1962): The strength of granules and agglomerates, Agglomeration, ed., Knepper, John Wiley & Sons, New York, 379-418.
- 176) 山口梅太郎・西松裕一 (1977): 岩石力学入門, 第2版, 東京大学出版会, 東京.
- 177) Hinze, J. O. (1975): Turbulence, 2nd edition, McGraw-Hill, New York.
- 178) Huck, P., and Murphy, K. L. (1978): Kinetic model for flocculation with polymers, Proc. ASCE Environ. Eng. Div., **104** (EE3), 767-784.
- 179) 栗谷陽一・楠田哲也・江副章之介 (1979): 平衡状態におけるフロックの粒度分布について, 第24回土木学会年次学術講演会, II-130, 347-350.
- 180) Glasgow, L. A., and Leucke, R. H. (1980): Mechanisms of deaggregation for clay-polymer flocs in turbulent systems, Ind. Eng. Chem. Fundam., **19**, 148-156.
- 181) 田中達夫 (1972): 粉碎, 化学工学Ⅱ, 藤田重文・東畑平一郎編, 東京化学同人, 東京.
- 182) Swift, D. L., and Friedlander, S. K. (1964): The

- coagulation of hydrosols by Brownian motion and laminar shear flow. *J. Colloid Sci.*, **19**, 621-647.
- 183) Birkner, F. B., and Morgan, J. J. (1968): Polymer flocculation kinetics of dilute colloidal suspensions. *J. Am. Water Works Assoc.* **60**, 175-191.
- 184) Hahn, H. H., and Stumm, W. (1968): Kinetics of coagulation with hydrolyzed Al (III). *J. Colloid Interface Sci.*, **28**, 134-144.
- 185) 日本粉体工業技術協会 (1982): 凝集工学—基礎と応用—, 日刊工業新聞社, 東京.
- 186) Zeichner, G. R. (1978): The effects of hydrodynamics and colloidal forces on coagulation of dispersions. Ph. D. Thesis, Princeton Univ.
- 187) Adler, P. M. (1981): Interaction of unequal spheres, 1. Hydrodynamic interaction: Colloidal forces. *J. Colloid Interface Sci.*, **84** (2), 461-474.
- 188) Batchelor, G. K., and Green, J. T. (1972): The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.* **56**, 375-400.
- 189) 粟谷陽一・楠田哲也 (1970): フロックの衝突効率について (Ⅱ) —剪断流中の場合—. *九大工学集報*, **43** (1), 11-15.
- 190) 楠田哲也 (1973): フロックの透水性と衝突効率に及ぼす影響. *水道協会雑誌*, **462**, 2-9.
- 191) LaMer, V. K., and Healy, T. W. (1963): Adsorption-flocculation reactions of macromolecules at the solid-liquid interface. *Rev. Pure App. Chem.*, **13**, 112-132.
- 192) 丹保憲仁 (1965): 水処理における凝集機構の基礎的研究 (Ⅲ). *水道協会雑誌*, **365**, 25-37.
- 193) Van de Ven, T. G. M. (1981): Effect of polymer

- bridging on selective shear flocculation. *J. Colloid Interface Sci.*, **81** (1), 290-291.
- 194) Smellie, R. H., and LaMer, V. K. (1958): Flocculation, subsidence, and filtration of phosphate slimes. VI, a quantitative theory of filtration of flocculated suspensions. *J. Colloid Sci.*, **13**, 589-599.
- 195) O'Melia, C. R. (1969): A review of the coagulation process. *Public Works*, **100**, 87-98.
- 196) Friedlander, S. K. (1960): On the particle-size spectrum of atmospheric aerosols. *J. Meteor.*, **17**, 373-374.
- 197) Twomey, S. (1977): *Atmospheric aerosols*. Elsevier Scientific Pub., Amsterdam.
- 198) Friedlander, S. K. (1960): Similarity considerations for the particle-size spectrum of a coagulating, sedimenting aerosol. *J. Meteor.*, **17**, 479-483.
- 199) Friedlander, S. K. (1961): Theoretical considerations for the particle size spectrum of the stratospheric aerosol. *J. Meteor.*, **18**, 753-759.

第2編 水質変化過程のモデルに関する応用的研究

第1章 移流拡散モデルに関する応用的研究

本章では水質変化モデルの中でもっとも基本的な移流拡散モデルに焦点をあて、これを実際場へ応用する際の2, 3の問題点について検討している。取り扱う水質は保存性あるいはせいぜい一次反応仮定が許容できる程度のものを対象とする。現在の所、移流拡散モデル自体については拡散係数及び数値解法を適切に選びさえすれば、ほぼ実用に耐え得るとされており、水質変化過程を表わす他の数値モデルに比べれば問題点が少ない¹⁾と考えられるようになってきた。したがって本章ではモデル自体の検討よりも、その応用的側面—内挿、逆問題、及び実際場への適用—について検討を行なうことにする。

1.1 水質分布の内挿法²⁾

水質分布の内挿を行うに当たって水質場がもつ物理的な条件などの先験的情報を取り込んだ方が望ましいことは明らかであろう。この立場から本節では内挿分布計算にあたって移流拡散モデルを積極的に利用する方法を提案する。この方法は考え方において気象学にて進展してきた“変分法による内挿法”に分類されるものであり、計算操作において環境データに対ししばしば利用されている“張力付きスプライン法”に類似する。すなわち、従来からの物理的根拠が疑問とされてきた“張力付きスプライン法”を移流拡散モデルを基礎として構成し直したものと考えることができる。

1.1.1 移流分散型内挿法の導出

水平2次元的な水質の分布が問題となるような場合を想定し、その挙動が定常、一次反応などに従うと仮定すれば、現象の基礎となるべき式は次のようになる。

$$M \frac{\partial c}{\partial x} + N \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} D_x H \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y H \frac{\partial c}{\partial y} - k H c \quad (1.1.1)$$

ここに M , N は x , y 方向の単位幅当たりの流量, D_x , D_y は拡散係数, k は

は反応係数， H は水深である。また陸地境界 Γ_1 では

$$\begin{aligned} & (Mc - D_x H \frac{\partial c}{\partial x}) \cos(\nu, x) + (Nc - D_y H \frac{\partial c}{\partial y}) \cos(\nu, y) \\ & + q = 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

が成立する。ここに q は線負荷項である。湾口，あるいは湖沼における流出河川部等の境界 Γ_2 においては境界条件が不明である場合が多い。従って Γ_2 における条件は規定しない。移流拡散式，境界条件などの他に先験情報がある場合は，これを

$$I_j(c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1.1.3)$$

として定式化しておく。式(1.1.1)～(1.1.3)は流動，諸係数，あるいは負荷条件などの不確定性によって，厳密に成立することは期待できない。そこで，それらに対する信頼度をそれぞれ， $\alpha(x)$ ， $\beta(x)$ 及び τ_j ($j = 1, 2, \dots, p$)とし，さらに監視データのそれを r_j ($j = 1, 2, \dots, n$)としておく。これらの信頼度は本内挿法の適用に対する経験を積むことによって定まるべき量である。

さて，内挿曲面 $c^*(x)$ は式(1.1.1)，(1.1.2)及び(1.1.3)を平均的に満足することが望ましいから，次の積分 $J(c^*)$ を考え，これを最小化する曲面として差し支えなからう。

$$\begin{aligned} J(c^*) = & \frac{1}{2} \int_S \int \left[\alpha(x) \cdot \left\{ M \frac{\partial c^*}{\partial x} + N \frac{\partial c^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} D_x H \frac{\partial c^*}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial y} D_y H \frac{\partial c^*}{\partial y} + k H c \right\}^2 + \sum_{j=1}^p \tau_j I_j^2(c^*) \right] dS \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \beta(x) \cdot \left\{ (M c^* - D_x H \frac{\partial c^*}{\partial x}) \cos(\nu, x) \right. \\ & \left. + (N c^* - D_y H \frac{\partial c^*}{\partial y}) \cos(\nu, y) + q \right\}^2 ds \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i (c^*(x_i) - c_i)^2 \quad (1.1.4)$$

Sは内挿すべき範囲を示す。式(1.1.4)の値が停留となるための条件は次のように表される。

$$\begin{aligned} & (J' + V'^t - k') \cdot \alpha \cdot (J' - V' - k') c^* + \sum_{j=1}^n \tau_j I_j \frac{dI_j}{dc} \\ & + \sum_{i=1}^n r_i (c^* - c_i) \delta(x_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

ここに J' , V' , V'^t は次に示す微分作用素であり, $\delta(x_i)$ はデルタ関数である。

$$\begin{aligned} J' &= \frac{\partial}{\partial x} D_x H \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y H \frac{\partial}{\partial y} \\ V' &= M \frac{\partial}{\partial x} + N \frac{\partial}{\partial y} \\ V'^t &= \frac{\partial}{\partial x} M \cdot + \frac{\partial}{\partial y} N \cdot \\ k' &= k H \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Γ_1 における自然な境界条件は,

$$\begin{aligned} & \left\{ - (F_D + F_C) + \frac{\partial}{\partial s} G \right\} \alpha (J' - V' - k') c^* + (F_C - \frac{\partial}{\partial s}) \beta \{ F_C \\ & - F_D \} c^* + q \} = 0 \\ & \alpha (J' - V' - k') c^* - \beta \{ (F_C - F_D) c^* + q \} = 0 \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

であり, Γ_2 におけるそれは,

$$\begin{aligned} & \left\{ - (F_D + F_C) + \frac{\partial}{\partial s} G \right\} \cdot \alpha \cdot (J' - V' - k') \cdot c^* = 0 \\ & (J' - V' - k') \cdot c^* = 0 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

となる。ここに F_D は次に示す微分作用素であり、

$$F_D = D_x H \cos(\nu, x) \frac{\partial}{\partial x} + D_y H \cos(\nu, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.1.9)$$

F_C, G は

$$F_C = M \cos(\nu, x) + N \cos(\nu, y) \quad (1.1.10)$$

$$G = H(D_x - D_y) \cos(\nu, x) \cos(\nu, y)$$

である。式(1.1.5)は次の2式に分ける方が見通しがよい。

$$(J' + V' + k') \varphi = - \sum_{j=1}^p \tau_j I_j \frac{d I_j}{d c} - \sum_{i=1}^n r_i (c - c_i) \delta(x_i) \quad (1.1.11)$$

$$\alpha(J' - V' - k') c^* = \varphi$$

この場合に対応する境界条件は次のようになる。すなわち、 Γ_1 にて

$$\left[- (F_D + F_C) + \frac{\partial}{\partial s} G \right] \varphi + (F_C - \frac{\partial}{\partial s}) \varphi = 0 \quad (1.1.12)$$

$$\varphi = \beta \left\{ (F_C - F_D) c^* + q \right\}$$

Γ_2 にては

$$\left[- (F_D + F_C) + \frac{\partial}{\partial s} G \right] \varphi = 0 \quad (1.1.13)$$

$$\varphi = 0$$

となる。式(1.1.5)に関し1, 2の簡単な例を挙げてみる。

- (1) 境界条件及びその他の先験情報はなし。監視点では観測値に強制。 $\alpha(x)$ は一定値であり、反応は無視し得る。 $D_x = D_y = D$ 、この場合には、 $\beta = r = k = 0$ となり、式(1.1.5)は

$$(A' + V'^2) \varphi = 0 \quad (1.1.14)$$

$$(A' - V') c^* = \varphi \quad (1.1.15)$$

となる。ただし、監視点では式(1.1.14)は

$$c^*(x_i) = c_i \quad (1.1.16)$$

となる。また境界 $\Gamma_1 + \Gamma_2$ では

$$(F_D + F_C) \varphi = 0 \quad (1.1.17)$$

$$\varphi = 0$$

である。

(2) (1)の仮定に加えて、 D, H, M を一定とし、 $N=0$ とする。この時には

$$A \varphi + \frac{M}{DH} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.1.18)$$

$$A c^* - \frac{M}{DH} \frac{\partial c^*}{\partial x} = \varphi$$

ただし、監視点及び境界では式(1.1.16)、(1.1.17)が成立する。

(3) (2)にて、1次元(x 方向)の時は

$$\frac{d^4 c^*}{dx^2} - \left(\frac{M}{DH} \right) \frac{d^2 c^*}{dx^2} = 0 \quad (1.1.19)$$

ただし、上、下流の境界点では

$$\frac{d^2 c^*}{dx^2} - \left(\frac{M}{DH} \right) \frac{dc^*}{dx} = 0 \quad (1.1.20)$$

$$\frac{d^3 c^*}{dx^3} - \left(\frac{M}{DH} \right) \frac{d^2 c^*}{dx^2} = 0$$

となる。式(1.1.19)は境界条件を別にすれば Schweikert, Cline らが提唱した張力下の1次元スプライン法と一致する。

以上、移流分散型内挿法による内挿曲面は式(1.1.5)～(1.1.10)あるいはその簡略式を満足する曲面として定義される。

1.1.2 移流分散型内挿法に関する実証的検討

本節では移流分散型内挿法(以下CD法と称す)に関し、(1)手法自体のフィジビリティに関する検討、(2)実際場のデータを使用した検討について述べる。計算はいずれも差分法によって行っている。²⁾

(1)手法のフィジビリティに関する検討

本検討としては図1.1.1に示すようなモデル内海を想定し図1.1.2のような仮想負荷源9点からの負荷排出があった場合の内海での濃度分布推定を試みている。その方法としては、

- 1) 図1.1.2中の9排出源での排出量を互いに独立に1～10単位の任意の値に設定する。
- 2) 監視点における濃度値を解析解²⁾によって算出し、それに±10%の一樣乱数を上乘せする。

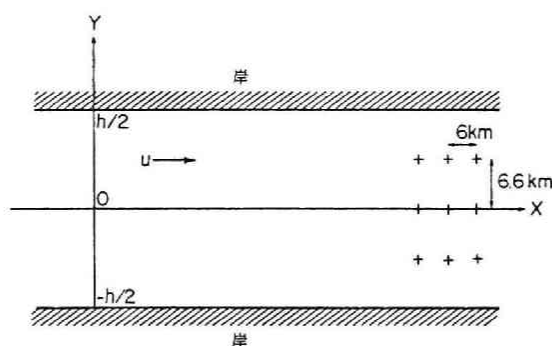


図 1.1.1 モデル内海の模式図

左から右に流速 u の流れがある。内海幅 $h = 20 \text{ km}$ 。

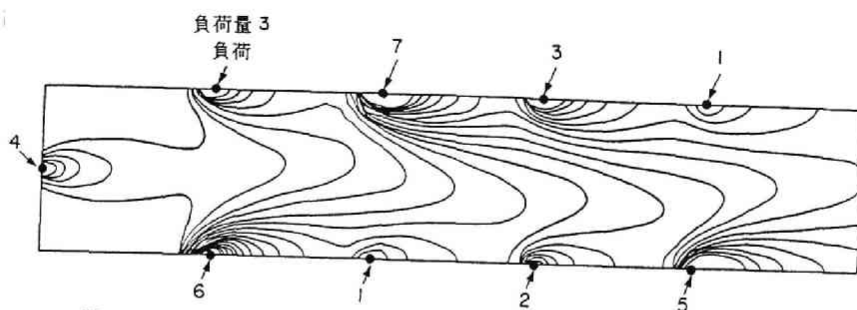


図 1.1.2 濃度分布の解析解の例

図中に示した 9 点の負荷源からの連続投入がある時を示す。流速 0.1 m/s ，拡散係数 $10^2 \text{ m}^2/\text{s}$ としている。等濃度線は等間隔に書かれている。

- 3) クロス・バリデーションによって平均相対残差を求める。
- 4) 1)～3) の操作を 10 ケースの流速，及び CD，SP（張力付きスプライン法）の 2 手法について計 60 回繰り返す。

表 1.1.1 に以上の計算成績を示す。流速が増大するにつれて，SP 法に比べ CD 法が良好な成績を納めている。

表 1.1.1 SP，CD 法の適用性に関する検討

手 法	流速 (m/s)	平均推定残差 (%)	勝ちケース数
SP	0.01	10.3	5
	0.03	16.1	4
	0.1	25.3	1
CD	0.01	10.0	5
	0.03	15.2	6
	0.1	18.4	9

モデル内海にて 10 ケースの負荷パターン 3 ケースの流速に関し内挿を行った時の平均相対残差及び，SP・CD 法の比較。

拡散係数は $10^2 \text{ m}^2/\text{秒}$ とした。

(2) 実際場のデータを使用した検討

実際場としては大阪湾を採用し 1972 年に環境庁によって測定された COD データ（環境庁水質保全局：瀬戸内海水質汚濁総合調査データ表）から採水部位 0，5 m の値の平均値を対象とする。図 1.1.3 のような流動パターンを仮定し拡散係数値をクロスバリデーションによって定めてみると表 1.1.2 のような結果を得た。表中 WT，KG はそれぞれ巾乗型移動平均法²⁾，統計的内挿法²⁾

表 1.1.2 CD法による平均相対誤差と他3手法のそれとの比較

手法 ケース名	S P	W T	K G	C D	S Pで採用された ϕ (1/Km)	C Dで採用された D (m ² /s)
720522	0.259	0.231	0.245	0.255	59.4	600
720801	0.263	0.312	0.281	0.253	20.1	700
721017	0.601	0.654	0.542	0.638	3.2	1000
730110	0.614	0.513	0.553	0.521	200.0	100
順位和	12	10	9	9		

CD, KG法がSP, WTに比べやや有利であるが, その差は小さい。

を意味する。また図 1.1.4 に内挿例を示す。

以上, CD法に関し数値実験的な検討を行い他手法に対する優劣を検討した。本検討で取り扱った例では, CD法の断然たる優位性は示すに到らなかった。しかるに本手法はその導出過程から考えて信頼度の高い流動状況とか負荷情報が与えられる限り, 因果関係に密着した内挿法であり, 今後の進展に期待する所が大きいと考えられる。

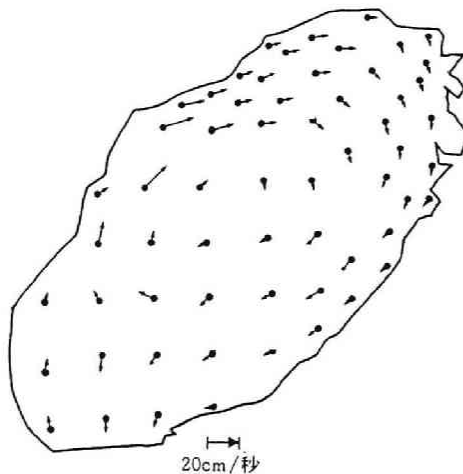


図 1.1.3 計算にて仮定された流動パターン

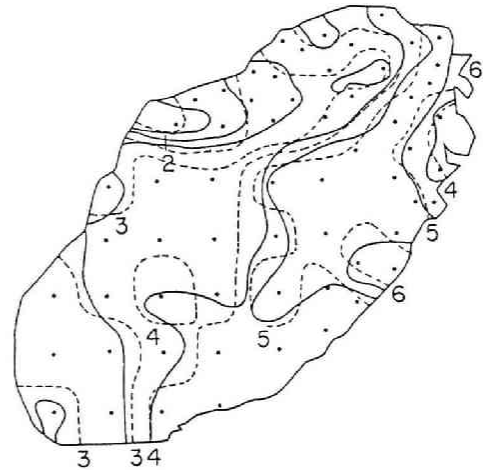


図 1.1.4 CD法による等濃度線図とSP法による等濃度線図の比較

(大阪湾 1972 年 5 月 22 日, COD の例)

実線はCD法による, 点線はSP法によるもの。

1.2. 汚濁源特性の解析^{3), 4), 5)}

本節では水域において汚濁源下流で観測された監視データを使用し汚濁源の諸特性を推定する手法を検討している。水質管理上、水質汚濁源の推定はきわめて重要な課題であり、その推定にあたっては多方面からのアプローチが必要であることは論をまたない。しかるに本節では監視データのみを主情報源とし、これに水質伝播特性を考慮することによって汚濁源情報に変換することを主眼とする。さらに本節では水質伝播を一次元移流拡散モデルに限定する。これらの仮定は問題を簡単化する便法であり、実際場への適用にあたっては実情にに応じ修正を行う必要があるが、いずれの場合も本節と類似の方法で解決することが可能であろう。

1.2.1 汚濁源特性の推定方法

水質伝播モデルとして次の一次反応型移流拡散式を考える。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x} - kc + q \quad (1.2.1)$$

ここに c は水質濃度、 u は流速、 D は拡散係数、 k は反応係数、 q は負荷項である。簡単のため u 、 D 及び k は定数とする。式 (1.2.1) の解はグリーン関数を $K(x, t; \xi, \tau)$ とし、下流水質による影響を無視すれば

$$\begin{aligned} c(x, t) = & \int_0^x d\xi \int_0^t d\tau q(\xi, \tau) \cdot K(x, t; \xi, \tau) \\ & + \int_0^t \left\{ D \left(c(0, \tau) \cdot \frac{\partial K}{\partial \xi} - K(x, t; 0, \tau) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + u c(0, \tau) K(x, t; 0, \tau) \right\} d\tau \\ & + \int_0^x K(x, t; \xi, 0) c(\xi, 0) d\xi \quad (1.2.2) \end{aligned}$$

となる。ここに $K(x, t; \xi, \tau)$ は次式で表される。

$$K(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4D(t-\tau)}} \exp \cdot \left\{ -\frac{(x-\xi-u(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} - k(t-\tau) \right\}, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (1.2.3)$$

また上下流境界条件の影響が小さく滞流時間に比べはるかに長時間後には式 (1.2.3) は

$$c(x, t) = \int_0^x d\xi \int_0^t d\tau q(\xi, \tau) \cdot h(x, t; \xi, \tau) \quad (1.2.4)$$

となる。本節で提唱する手法は式 (1.2.2) あるいは式 (1.2.4) で表わされる水質伝播モデルを使用して観測した $c(x, t)$ から $q(\xi, \tau)$ の情報を得ようとするものである。その際式 (1.2.4) のままでは推定不可能であるから、何からの制約条件を課す必要がある。例えば

$$q(\xi, \tau) = z(\xi) \cdot y(\tau) \quad (1.2.5)$$

として z あるいは y いずれかを既知とすれば、式 (1.2.4) はフレンドホルム I 型あるいはボルテラ I 型の積分方程式となり、適当な数値手法によって未知関数である $y(\tau)$ あるいは $z(\xi)$ を推定することが可能となる。定式化にあたっては式 (1.2.4) 両辺差を何らかの意味で最小化する方法が都合よく、例えば

$$\int_0^{t_1} \left\{ c(x, t) - \int_0^x d\xi \int_0^t d\tau q(\xi, \tau) \cdot K(x, t; \xi, \tau) \right\}^2 dt \rightarrow \text{minimum} \quad (1.2.6)$$

のような定式化が考えられる。ここに t_1 は監視時間である。

式 (1.2.6) を解くために \dot{z} , τ などについて離散化し取り扱うことにする。例えば $z(\xi)$ が未知関数であるボルテラ I 型の場合, T を転置記号として,

$$(K^T \cdot K + \alpha I) z = K^T c \quad (1.2.7)$$

但し

$$K_{i,j} = \int x \int t \sum_{k=1}^m K(\overline{j-0.5} \int x, \overline{k-0.5} \int t : n \int x, \overline{i-0.5} \int t) \\ \cdot y(\overline{k-0.5} \int t), \quad i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.8)$$

$$z = \begin{bmatrix} z(0.5 \int x) \\ z(1.5 \int x) \\ \vdots \\ z(\overline{n-0.5} \int x) \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c(0.5 \int t) \\ c(1.5 \int x) \\ \vdots \\ c(\overline{m-0.5} \int t) \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

となる。ここに m, n はそれぞれ $\int t$ 毎のサンプリング数 ($m \int t = t_1$), 及び x の区分数 ($n \int x = x$) であり, α は式 (1.2.7) を正則化するための非負である微小な値, I は単位行列である。式 (1.2.6) に関し y あるいは z に対する適当な条件を付与することもできる。例えば未知関数 z に非負値性を仮定すれば

$$(Kz - c)^T \cdot (Kz - c) + \alpha z^T \cdot z \rightarrow \text{minimum} \quad (1.2.10)$$

$$z_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

なる 2 次計画問題に帰着する。その他, 問題に応じ線型計画法, 最適追跡法 (optimum tracking method) などの適用が可能である。また式 (1.2.7)

の解法としても、バッチ的に解く以外に監視データの追加によって解を逐次的に改良していくことも容易であり、数理計画法における各種の手法の適用が試みられている。^{3), 4), 5)}

1.2.2 実験・実測による検証

第1.2.1節で提案した手法を実際場に適用するにあたっては伝達関数 $K(x, t; \xi, \tau)$ の推定が問題となる。実験水路あるいは清澄な河川ではパルスの投入したトレーサーを追跡することによってその分散能を推定することは容易であるが、汚濁河川では困難である。そこで次の方法により $K(x, t)$ を推定することを考える。

今、 $0 \leq x \leq L$ にて主要な負荷源がなく $Pe (= uL/D) \gg 1$ かつ $tu/L \gg 1$ である時、式(1.2.2)は近似的に

$$c(L, t) = \int_0^t u c(0, \tau) \cdot K(L, t: 0, \tau) d\tau \quad (1.2.11)$$

となる。したがって、今度は $c(0, t)$ 、 $c(L, t)$ を観測しそれらから $K(L, t: 0, \tau)$ を求めることにすれば、

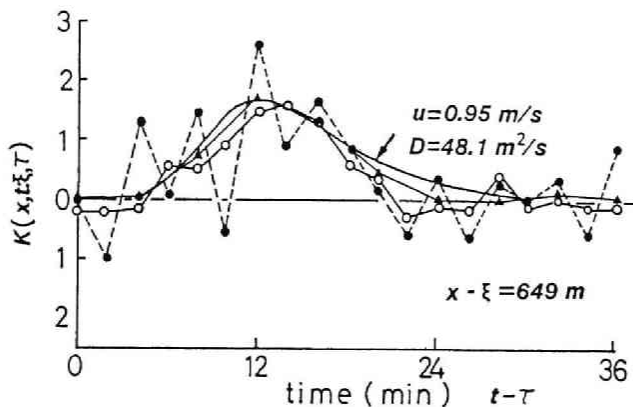


図 1.2.1 伝達関数の推定

- $\alpha = 0$ の場合
- $\alpha = 0.02$ の場合
- ▲ 2次計画法 ($K \geq 0$) の場合

$$K_{i-j} = u \int_t K(L, \overline{i-0.5} \int_t; 0, \overline{j-0.5} \int_t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, i$$

$$c_{0i} = c(0, i-0.5 \int_t) \quad (1.2.12)$$

$$c_{1i} = c(L, i-0.5 \int_t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

として式(1.2.11)は

$$c_{1i} = \sum_{j=1}^i K_{i-j} c_{0j} \quad (1.2.13)$$

となるから、 K_{i-j} は次式で定義される ϕ を

$$\phi = \sum_{i=1}^m (c_{1i} - \sum_{j=1}^i K_{i-j} c_{0j})^2 + \alpha \sum_{i=1}^m K_i^2 \quad (1.2.14)$$

最小化する値とすればよい。その際 K_i に関する適当な条件、例えば

$$K_i \begin{cases} \geq 0 & (i \leq M) \\ = 0 & (i > M) \end{cases} \quad (1.2.15)$$

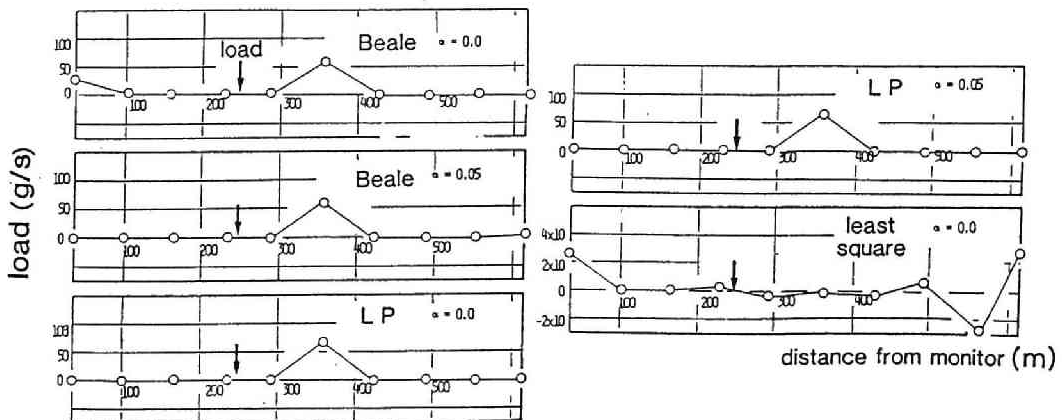
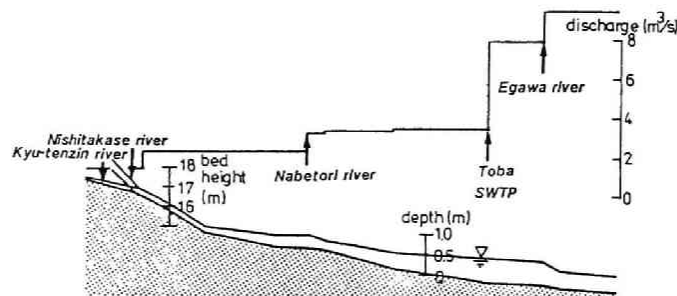


図 1.2.2 汚濁源位置の推定（現場）

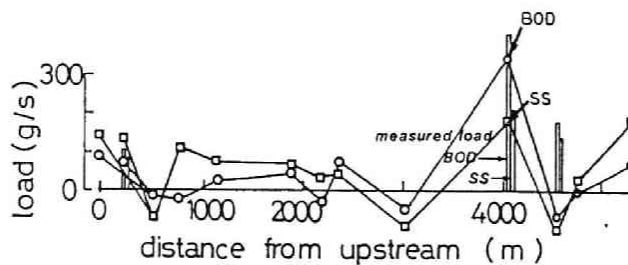
BOD₅ の場合。 $k = 0$, $u = 0.71 \text{ m/s}$, $D = 48.1 \text{ m}^2/\text{s}$ としている。Beale とは 2 次計画法 (Beale 法), LP とは線型計画法により推定計算を行ったことを示す。

などの工夫によって解が改良される場合も多い。例えば、図 1.2.1 は京都市西高瀬川下流 649 m の区間にて濁度を 2 分間隔に観測し、それによって推定した K であり上にのべた事情が示されている。図 1.2.2 はこの方法によって求めた $D = 48.1 \text{ m}^2/\text{s}$ 及び観測流量から推定した $u = 0.71 \text{ m/s}$ を使用して対象区間内の負荷源推定を行ったものである。実際には監視点上流約 250 m 地点に BOD_5 150 g/s 程度の負荷源が存在しているが計算では 350 m 上流地点と推定している。流れの不等性あるいは上流端からのバックグランド負荷（約 500 g/s ）などの影響が表われている疑いが強い。図 1.2.3 は対象区間を上流側にのばし推定を行った例である。この場合、流量、河床勾配などが流下に伴い大きく変化する等流仮定に明らかに成立せず、 $K(x, t; \xi, \tau)$ を求めるに工夫が必要となる。本計算では 1 次元有限要素法によった。また流入負荷パターンとしては主要点源である旧天神川、鳥羽下水処理場及び江川にて 30 分毎に実測したものをを用いた。図 1.2.3 (b) から鳥羽処理場に対応する負荷源に関しては



(a) 対象河川の概況

(b)



(b) 汚濁源位置

図 1.2.3 汚濁源位置の推定（現場）

BOD_5 、 SS の場合。1976 年 9 月 8 日観測データによる。

比較的適合度が高い推定が行われている。

一方実験水路での例を図 1.2.4 に示す。使用した水路は図 1.2.5 に示すものであり、メチレンブルー溶液をプログラム設定器によりあらかじめ設定された時間パターンによって投入している。負荷源は矢印で記した 2 カ所であるが下流側投入点に関しては最小自乗法 ($\alpha \neq 0$)、2 次計画法あるいは線型計画法に

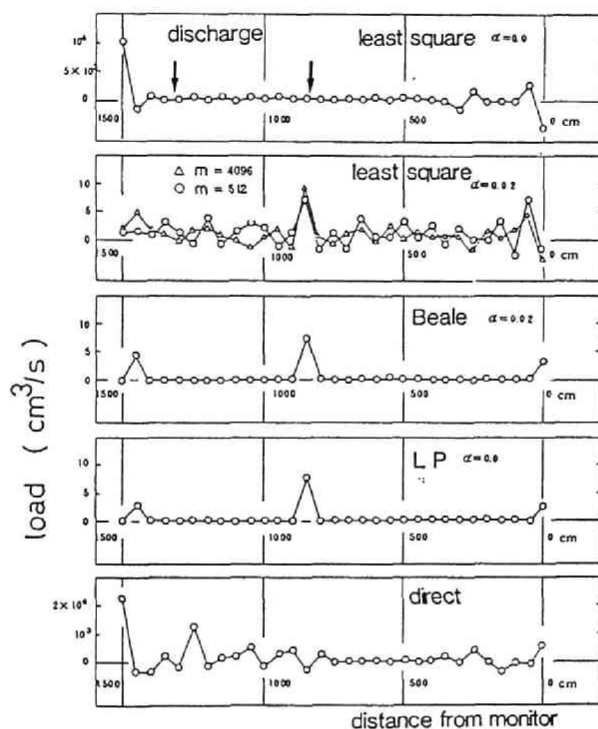


図 1.2.4 汚濁源位置の推定 (実験水路)

メチレンブルー溶液, 流量 3.0 l/s , h (水深) = 7.23 cm , u (流速) = 25.5 cm/s , $D = 10.51 \text{ cm}^2/\text{s}$, 投入周期 148 秒。

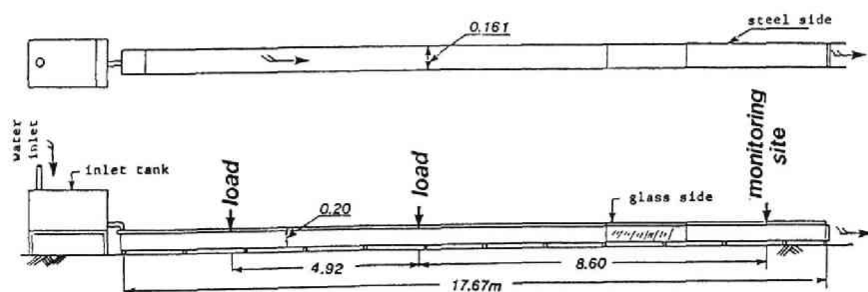


図 1.2.5 実験水路

よって位置推定が成功している。他の条件下でもほぼ同様の成績を納めており、例えば図 1.2.6 は投入周期を 15.6 ～ 592 秒の 6 段階に変化させた時の推定された上位 2 投入点の累積位置を示したものである。この場合でも下流側投入点はほぼ正確に推定されているが、上流側投入点の推定状況は良好とは言えない。

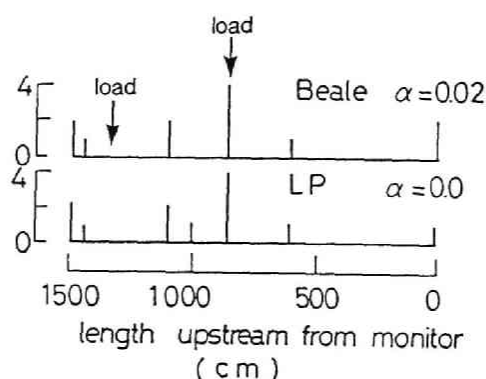


図 1.2.6 汚濁源位置の推定（実験水路）

投入周期を 15.6 ～ 592 秒の 6 段階に変えた時の 2 投入位置の推定，全 6 ケース。縦軸は推定された回数である。

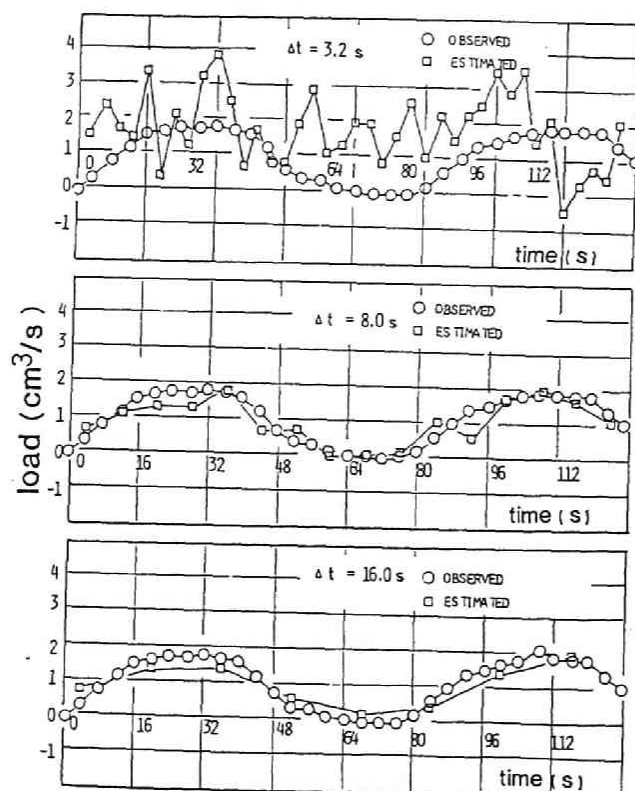


図 1.2.7 投入の時間的パターンの推定（実験水路）

推定にあたって注意すべき点の一つにサンプリング間隔がある。例えば、図 1.2.7 はサンプリング間隔 Δt を 3.2, 8.0, 16.0 秒と変化させたデータから式 (1.2.4) にて $z(\xi) = \delta(\xi - \xi_0)$ とした時の未知関数 $y(\tau)$ を求めたものである。

その方法としては式 (1.2.4) の積分区間を $(-\infty, t)$ に変更し

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) \cdot K(x, t; \xi_0, \tau) d\tau \quad (1.2.16)$$

これを t に関しフーリエ変換すると

$$\tilde{c}(x, \omega) = Y(\omega) \cdot \tilde{K}(x, \omega; \xi_0) \quad (1.2.17)$$

但し

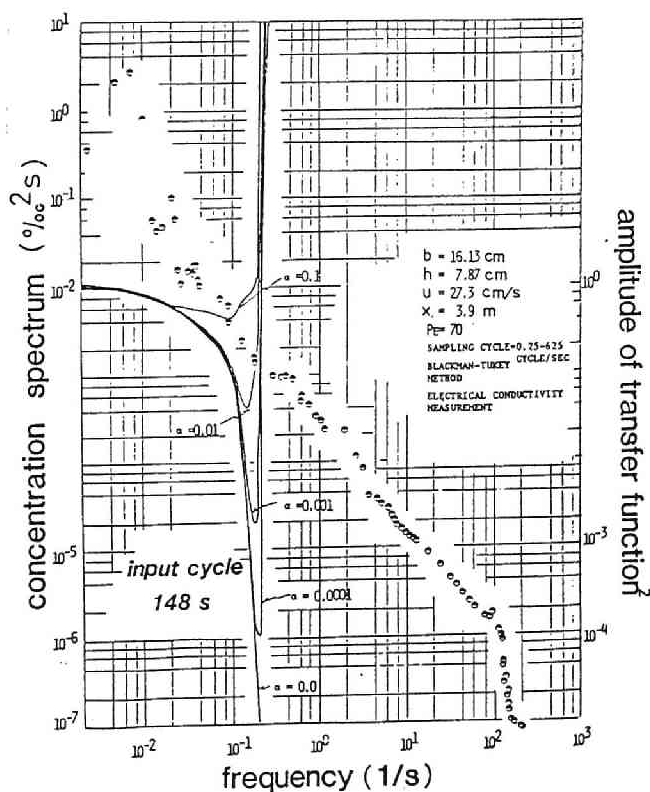


図 1.2.8 水質監視データのパワースペクトラムと伝達関数

$$\tilde{K}(x, w; \xi_0) = \frac{\exp \left\{ \frac{u(x - \xi_0)}{2D} \cdot \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4D}{u^2} (i w + k)} \right] \right\}}{u \sqrt{1 + \frac{4D}{u^2} (i w + k)}} \quad (1.2.18)$$

を得るから

$$Y(w) = \frac{\tilde{c}(x, w)}{\tilde{K}(x, w; \xi_0)} \quad (1.2.19)$$

として $Y(w)$ を逆フーリエ変換すればよい。式(1.2.18)の絶対値は w に関する急減な減小関数であるから、式(1.2.19)とは、水質の伝播に伴い急速に平滑化された変動を周波数に応じて増幅し直す操作であることがわかる。しかし、 $\tilde{c}(x, w)$ は上流負荷源の情報を伝えているとは限らず、特に高周波側では S/N 比が下がっていることが予想されるから式(1.2.19)の操作も適当な周波数以下に制限する必要が生ずる。その1つの方法がサンプリング間隔の制御でありこの場合にはその間隔に応じた低周波カットオフフィルターを自動的に乗じていることになる。図1.2.7にて高頻度のサンプリングが逆に悪い結果となっているのは以上の理由であろう。他の簡単な方法としては式(1.2.6)の替りに

$$\begin{aligned} \Phi = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ c(x, t) - \int_{-\infty}^t y(\tau) K(x, t; \xi_0, \tau) d\tau \right\}^2 \\ & + \alpha y^2(t) \Big\} dt \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

を最小化するように考えてみる。この解は

$$Y(w) = \frac{\tilde{K} \tilde{K}^*}{\alpha + \tilde{K} \tilde{K}^*} \cdot \frac{\tilde{c}}{\tilde{K}} \quad (1.2.21)$$

である。ここに $*$ は複共役を表わす。すなわち式(1.2.19)に $|1/(1 + \alpha/\tilde{K} \tilde{K}^*)|$ なる減衰率をもった低周波カットオフフィルターを乗ずることに

相当している。図 1.2.8 は以上述べてきた状況を図示するために実験で得られた下流水質変動のパワースペクトラム及び $|1 + \alpha / \tilde{K} \tilde{K}^*|^2 \cdot |\tilde{K}|^2$ を示したものであり、 $\alpha (> 0)$ によって鋭い高周波切断がなされることがわかる。式 (1.2.7) あるいは式 (1.2.10) の α も同様の意味をもつものと考えられる。

以上、流水監視による汚濁源特性の推定は水質伝播特性が明瞭であり、伝播モデルの適合度が高い一様水路などでは比較的良好な成績を納めるが、不等性が高く、負荷状況が複雑な場合にはより一層の工夫が必要となる。その 1 つの方向としては関連情報を可能なかぎり目的関数あるいは制約条件として取り込むことが考えられる。また他の有力な方向としては本方法と移動監視による汚濁源探索行動を連結させることがあり、両情報の有機的な総合化によってより強力な汚濁源監視手法を期待することができよう。

1.3 湖の水質流動モデル

本節では有限要素法による湖水質の流動解析を行う。対象場としてはびわ湖南湖を取り上げ、この水域での水質の移流拡散プロセスに焦点をおいている。琵琶湖の水資源をめぐる問題は古く江戸時代から論議されているが特に 1972 年から進められている“びわ湖総合開発”は利用低水位を B. S. L. - 1.5 m とすることによって利用水位幅を増加させ、開発水量 $40 \text{ m}^3/\text{s}$ をもくろむものである。総合開発ではその他に流域下水道、し尿処理場などの建設による湖水質保全対策も行っているが、これらの計画が湖水理、湖水質に大きく変更する可能性をもつことは言うまでもない。本節で開発された流動モデルの第 1 の目的はこうした湖水理・湖水質の変化の予知を目的とするが、適用された手法自体は他の水域に対しても容易に適用できるものと考えられる。

本節では湖を 2 次元 1 層モデルにより近似し、流動に関する運動方程式、連続式及び水質の移流拡散式を数値計算によって解析する。その際、拡散係数値あるいは水質反応変化機構が問題となるが、これらの一部は実測、実験によって求めている。

1.3.1 基礎方程式系

本節で取り扱う基礎式系は次の式 (1.3.1) ~ (1.3.4) である。

$$\begin{aligned} \text{運動方程式 : } & \frac{\partial M}{\partial t} + \left\{ 2 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{U}{h} \cdot \frac{\partial (H + \eta)}{\partial x} \right\} M \\ & + \left\{ -f_c + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{V}{h} \cdot \frac{\partial (H + \eta)}{\partial y} \right\} N \\ & + g (H + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{x,b} - \tau_{x,s}) = 0 \quad (1.3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \left\{ f_c + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{h} \cdot \frac{\partial (H + \eta)}{\partial x} \right\} M \\ & + \left\{ 2 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{V}{h} \cdot \frac{\partial (H + \eta)}{\partial y} \right\} N \\ & + g (H + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{y,b} - \tau_{y,s}) = 0 \quad (1.3.2) \end{aligned}$$

$$\text{連続式 : } \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = q \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{水質移流・拡散式 : } & \frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ & - U \frac{\partial c}{\partial x} - V \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{q}{h} (c_0 - c) + R, \\ & c_0 = \begin{cases} c_s & q < 0 \\ c_{01} & q \geq 0 \end{cases} \quad (1.3.4) \end{aligned}$$

ここに t : 時間, x, y : 東西方向及び南北流量, M, N : x, y 方向の線流量, U, V : x, y 方向の流速, g : 重力の加速度, H : 水深, η : 水位, f_c : コリオリパラメータ, τ_b : 底摩擦抵抗, τ_s : 水面での摩擦抵抗, q : わき出し流量, c : 濃度, R : 水質反応速度である。 τ_b, τ_s に関しては慣用型である,

$$\tau_{x \text{ or } y, s} = r_a^2 \rho_a Q_{x \text{ or } y} \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \quad (1.3.5)$$

$$\tau_{x \text{ or } y, b} = r_b^2 \rho U \sqrt{U^2 + f^2} \quad (1.3.6)$$

とする。ここに $Q_{x \text{ or } y}$ は x 及び y 方向への風速, ρ_a : 空気密度, ρ : 水密度である。式中にあらわれる各パラメータ値は $f_c = 8.36 \times 10^{-5}$ ラジアン/秒, $r_a^2 = 1.3 \times 10^{-3}$, $r_b^2 = 2.6 \times 10^{-3}$ としている。2次元一層モデルの妥当性, 式(1.3.5), (1.3.6) 及び上記パラメータ値の妥当性については良く流布されている。⁶⁾ また式(1.3.1) ~ (1.3.4), 及び境界条件の有限要素法による取り扱いについてはびわ湖南湖を例にとって文献7)で詳述されており再記を避ける。

1.3.2 拡散係数⁸⁾

式(1.3.4)中の拡散係数は水域により大きく変化し実測による検討が望ましい。したがって本研究においても当水域における測定結果を参照する他に、別途実測を行っている。使用した方法は旗竿漂流浮きを追跡し拡散に伴う浮き群の分散楕円増大速度から拡散係数を推定するものである。観測は天津打出浜

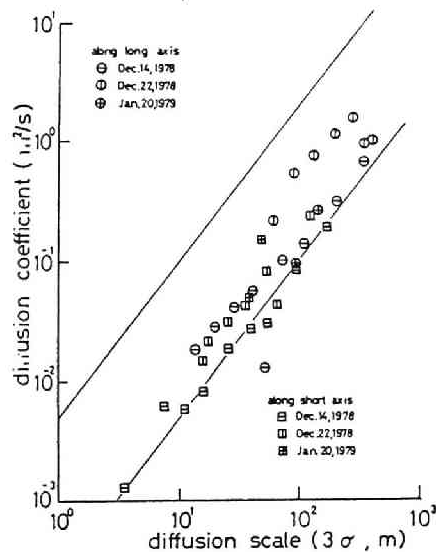


図 1.3.1 拡散係数

42 個の竿浮きを漂流させ 2 次モーメントの変化率から拡散係数を求めている。図中の直線は海洋拡散実験で得られている上下限を示す。¹⁰⁾

沖にて1978年冬期に3回にわたり行われた。図1.3.1は拡散係数を拡散長さスケールにより整理したものであり $10^2 \sim 10^3$ m程度のスケールの時にはほぼ $1 \text{ m}^2/\text{s}$ 程度の大きさとなっている。これは建設省により観測された値とほぼ一致している。なお、観測時の風速は 0.3 m/s 以下が大半であり強風時にはより大きな値となる可能性が大きいと考えられるが、以下本モデルでは $1 \text{ m}^2/\text{s}$ を採用する。

1.3.3 水質変化の項

本節では式(1.3.4)右辺の R に関するモデル化を取り扱う。本項は水質によって構造が異なるが、以下の実測と対応して BOD_5 及び浮遊性物質(SS)について述べる。

(1) BOD_5

ひとまず1次反応式(1.3.7)を仮定する。

$$R = -kc \quad (1.3.7)$$

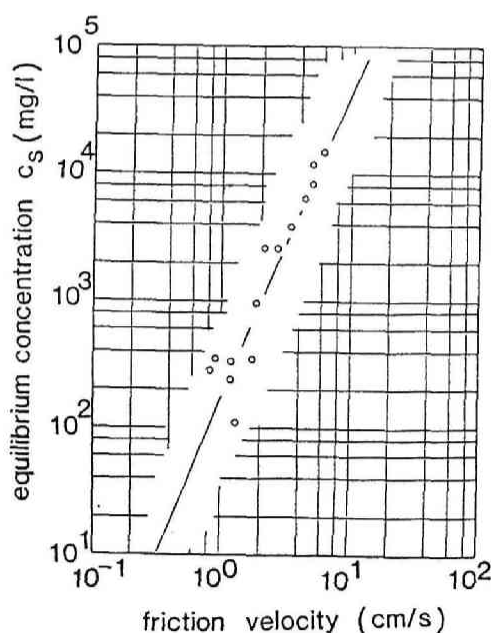


図1.3.2 平衡濃度と摩擦速度

(2) 浮遊性物質 (SS)^{11), 12)}

簡単なオーダ計算から南湖では掃流よりも浮流が流動の中心となる (摩擦速度 $u_* = 0.1 \sim 1.0 \text{ cm/s}$, 粒径 10^{-3} cm の時)。そこで, 湖水を流水部, 底水部の 2 部に分け, 流動は流水部にて発生していると考え, 両部の水質交換量が R に対応するが, これを沈降作用と拡散作用の和で表わすと

$$R = \frac{1}{H + \eta} \left[D_z \frac{\partial c}{\partial z} - w c \right]_{z=a} \quad (1.3.8)$$

ここに a とは両部を分割する高さであり底水部厚さ $(H - a) \ll$ 全水深 $(H + \eta)$ と仮定している。また D_z は鉛直方向係数, w は沈降速度である。式 (1.3.8) の評価については種々の研究があるが, 本モデルでは次のように考える。

- 1) 巻き上げ速度 $D_z \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=a}$ は巻き上げられる底泥が十分存在する時には底水部付近の水理状況, 泥粒径, 泥比重などにより制限される。
- 2) 水理状況が定常であり流水部濃度分布も平衡状況になっている場合には巻き上げフラックスと沈降フラックスは釣りあっている。このような状況について水理状況が若干変化した場合にはそれに対応して巻き上げフラックスが変化するがその量は主として変化後の水理状況, したがって変化後の

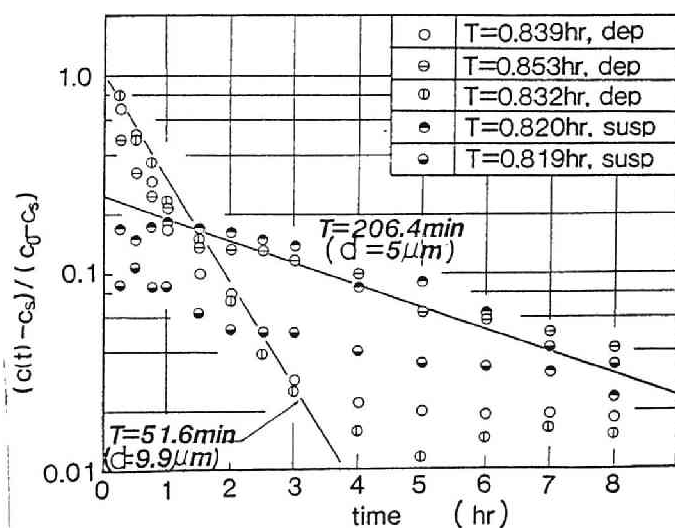


図 1.3.3 SS 濃度と変化

円筒型水槽 (外径 50 cm, 内径 30 cm) の上蓋部回転速度を急変させその時の槽内平均濃度の変化をプロットしたもの。

平衡分布から推定されるフラックス量と仮定する。

以上の考えから R のモデルを構成する。サフィックス s によって平衡状態を示し、 r によって $z = a$ における濃度と流水部平均濃度の比を示すことになる。 r 及び平衡時濃度分布を Lane-Kalinski 分布であらわせば

$$r = \frac{15w}{u_* \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{15w}{u_*} \right) \right\}} \quad (1.3.9)$$

$$c_s |_{z=a} = \alpha \left[\frac{u_*}{w} \exp \left\{ -\left(\frac{w}{u_*} \right)^2 \right\} \right]^n \quad (1.3.10)$$

これを利用すれば R は

$$R = -\frac{rw}{H+\eta} (c - c_s) \quad (1.3.11)$$

となる。式 (1.3.11) によれば流水部浮遊性物質濃度には α (定数) によって表わされる底の状況、および摩擦速度、沈降速度によって決定される飽和濃度 c_s が存在し、もし流水部濃度がその濃度と異っている場合には $(H+\eta)/rw$ なる時定数で 1 次反動的に漸近していくことになる。

式 (1.3.11) の実験による検討例として以下の諸点をあげる。

- 1) 南湖底泥を使用して円筒型実験水路により平衡濃度を測定すると図 1.3.2 のようになる。
- 2) 水理状況を急変させた場合の水質応答は円筒型実験水路の場合、図 1.3.3. のようになる。図中 T は $(H+\eta)/rw$ (粒径 $d = 9.9 \mu\text{m}$) を示し、また dep, susp とは摩擦速度を急減した場合、急増した場合である。本図にて式 (1.3.11) の適合は必ずしも良好でない。その第 1 は水質応答が片対数紙上で必ずしも 1 本の直線で表わし得ないことがある。第 2 は巻き上げ時の濃度の急激な上昇 (平衡濃度への接近) がある。前者の原因としては泥の粒度性 (粒度分布 (図 1.3.4) を測定すると $5 \mu\text{m}$, $20 \mu\text{m}$ 付近にピークがある) が考えられる。後者の原因としては非平衡時における両部境界面での濃度と流水部濃度の比を平衡時濃度分布から推定したことが上

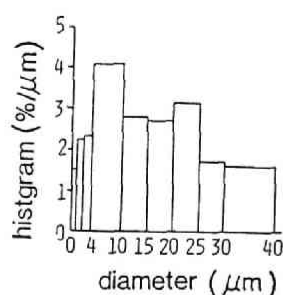


図 1.3.4. 実験に使用した湖泥の粒度分布
浜大津沖にて採取

げられる。

これらの欠点にもかかわらず、本モデルでは R の表示として式 (1.3.11) を採用する。その理由は、上記の欠点をおぎなうためには、いまだ多大な研究を必要とすること、またモデル化されるにしろ複雑な構造をもつことが予想されることにある。

式 (1.3.9.) ~ (1.3.11) に含まれるパラメータ値は上記の実験から $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}$, $\eta = 2.31$ とした。また u_* は水面からの乱れ効果を考慮して

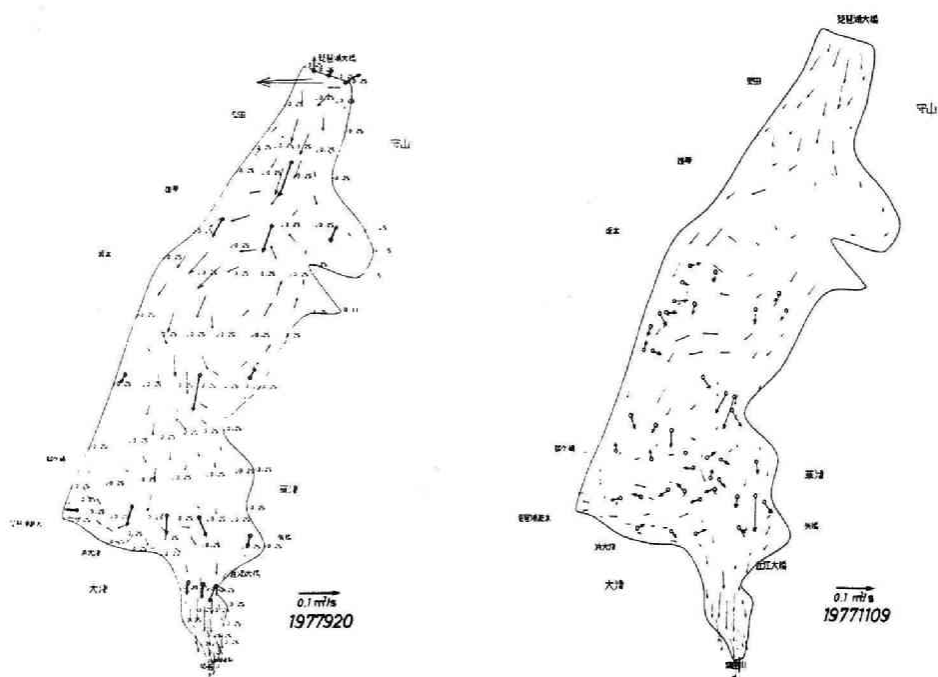
$$u_*^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ \tau_b + \tau_s \cdot \exp \left(-\frac{H + \eta}{h_0} \right) \right\} \quad (1.3.11)$$

とした。 h_0 は計算・実測値の適合パラメータである。

1.3.4 びわ湖南湖への適用¹³⁾

計算は Galerkin 法により 3 角形要素を用いて行われた。設定境界条件は北端の琵琶湖大橋にて水位、濃度を与え、南端の国鉄瀬田川鉄橋において流出水量及び移流のみによる水質流出条件を与えた。他の流出入河川についても同様である。一般の湖岸については $M = \Lambda = 0$ 及び拡散フラックス = 0 としている。計算で必要とされる連立一次方程式解法には Gauss 消去法を基本としたが、精密要素の場合には計算機容量の点からユニット並列法を使用した。⁷⁾

流動計算の適合性は 1977 年 9 月 ~ 12 月の 11 回にわたる実測パターンの比較により検討した。図 1.3.5 はその例である。また図 1.3.6 は北風 2 m/s 時



(a) 1977 年 9 月 20 日

(b) 1977 年 11 月 9 日

瀬田川流量 $58.7 \text{ m}^3/\text{s}$ ，疎水流量 $19.6 \text{ m}^3/\text{s}$ ，三保ガ崎水位 B.S.L. - 0.25 m ，西風 $2.7 \text{ m}/\text{s}$ 。瀬田川流量 $64.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ，疎水流量 $10.2 \text{ m}^3/\text{s}$ ，三保ガ崎水位 B.S.L. - 0.49 m ，北風 $5.5 \text{ m}/\text{s}$ 。

図 1.3.5 流動計算の適合性検討例

の流動を 24 要素，149 要素，1432 要素の 3 段階の要素密度によって解析した例を示したものである。このように湖内循環パターンは風況によって異なり，北・東風では右廻り，南・西風では左廻りの傾向をもつ。これは建設省¹⁴⁾によっても観測されており，いわゆる “Topographic gyres”¹⁵⁾ で説明し得る現象である。なお図 1.3.6 から 24 要素モデルによっても湖内大循環は充分再現されることがわかる。以上のように本モデルによる流況状況はある程度の再現性を持つと考えてよく，次にこれらを使い水質挙動の適合性及び特性を検討した例を上げる。

(1) BOD_5 の再現性

図 1.3.8 は BOD_5 再現性検討例である。外部負荷は北湖及び流入 24 河川からの観測期間中 (1977.9 ~ 1978.7) の平均値 (北湖から $195 \text{ g}/\text{s}$ ，河川か

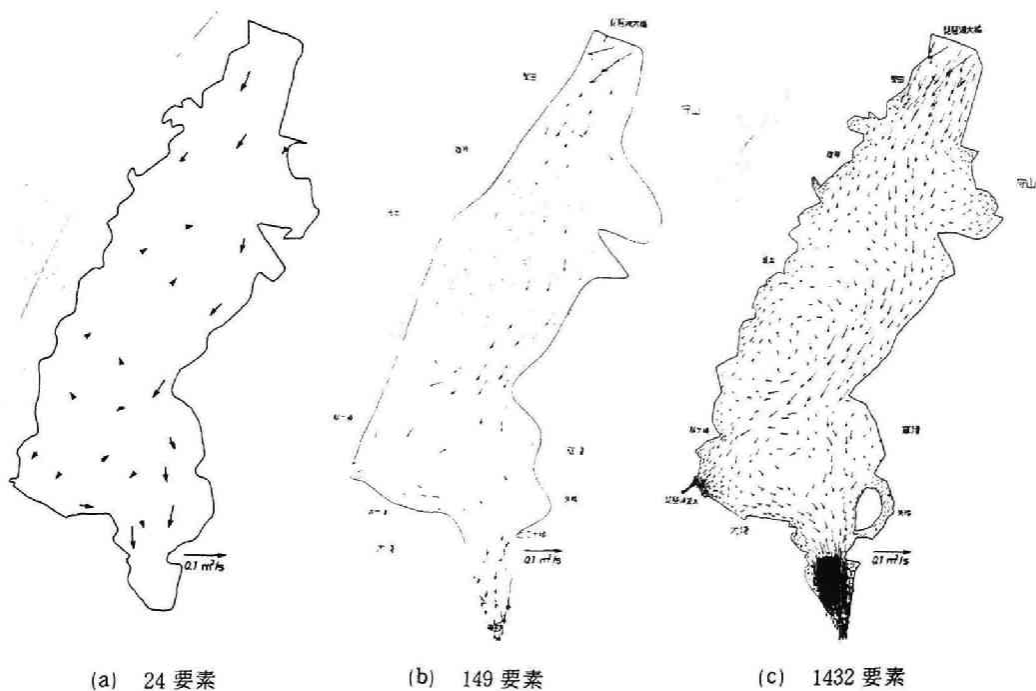


図 1.3.6 流動計算の要素数に対する感度解析

瀬田川流量 $60 \text{ m}^3/\text{s}$ ，疎水流量 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ ，三保ガ崎水位 B.S.L.+ 0 m

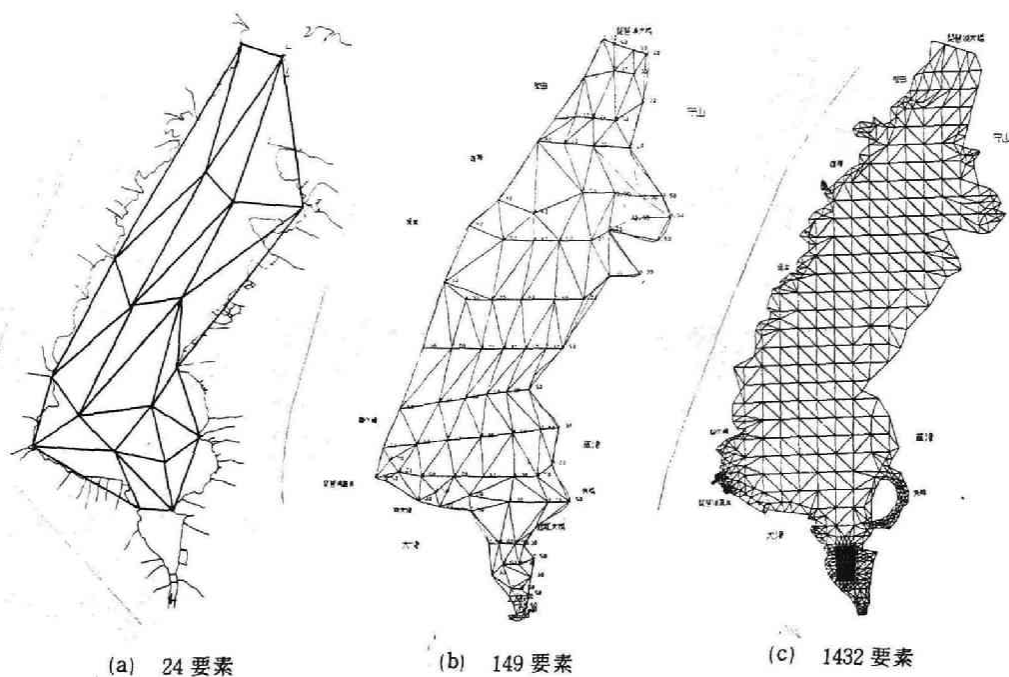


図 1.3.7 図 1.3.6 の計算に使用した要素分割

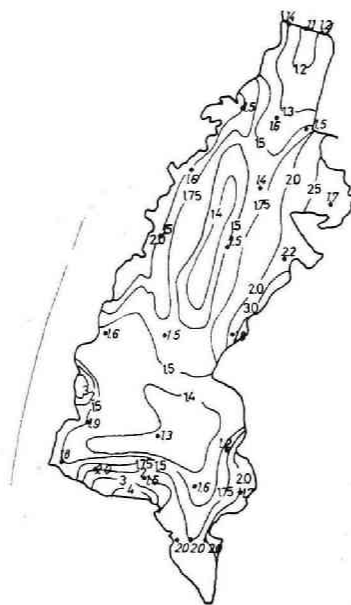


図 1.3.8 BOD₅ の再現性

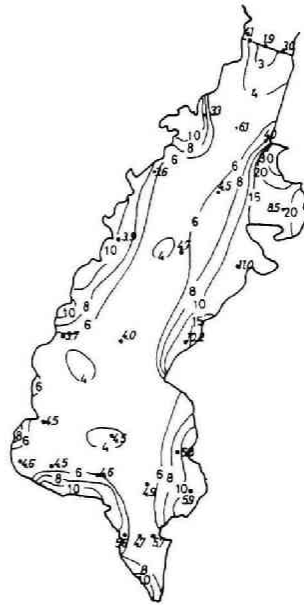


図 1.3.9 SS の再現性

らの全流入負荷 54.6 g/s) であり, 計算はこれらの流入負荷と南湖低水時流況と考えられる瀬田川流量 $60 \text{ m}^3/\text{s}$, 疏水流量 $20 \text{ m}^3/\text{s}$, 西風 2.0 m/s 下での定常流動結果を使用した。反応係数 k は $0.0432/\text{d}$ としている。

(2) SS の再現性

図 1.3.9 は SS の再現性検討例である。外部負荷 (北湖から 147 g/s , 流入河川から 225 g/s) の設定方法, 流況仮定は(1)と同じである。 h_0 は 3.7 m とした。

(3) 流況急変時の SS 再現性

図 1.4.10 は流量を急増・急減させた場合の湖内での巻き上げ量 (ネット) の変化である。これは 1981 年 7 月 8 日～7 月 11 日にかけての南郷洗堰全開放流に伴う変化を対象としたもので, 図 1.3.10 には湖を坂本一志那ラインで 2 分した時の北半分, 及び全域での計算巻き上げ量及び実測値を示している。 h_0 は 2.5 m としている。

(4) 強風時における SS 濃度の変化

強風による湖水擾乱によって底泥が巻き上がることはよく知られている。図

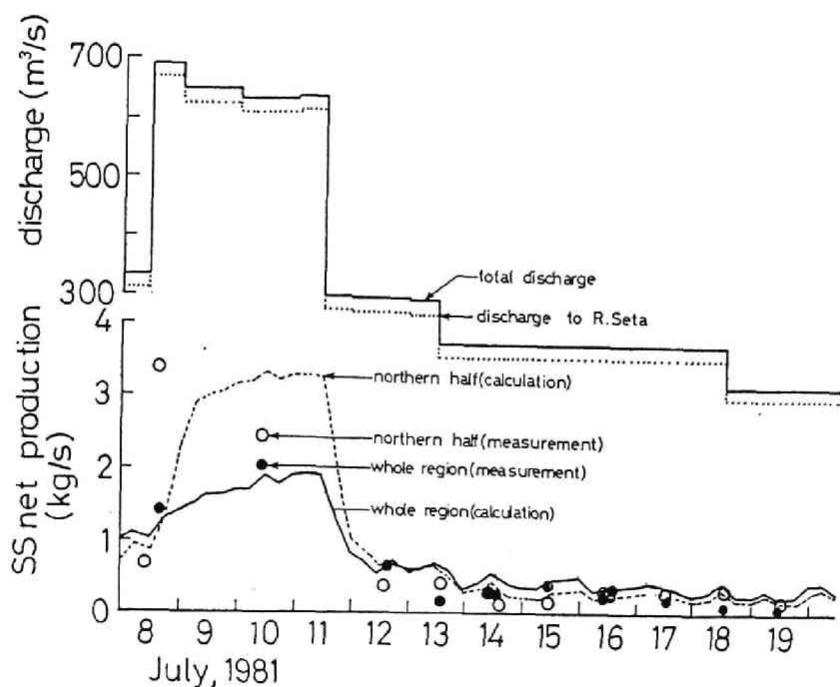


図 1.3.10 流況急変時のSS生産量

実測値は建設省琵琶湖工事事務所による観測データから算出したもの。

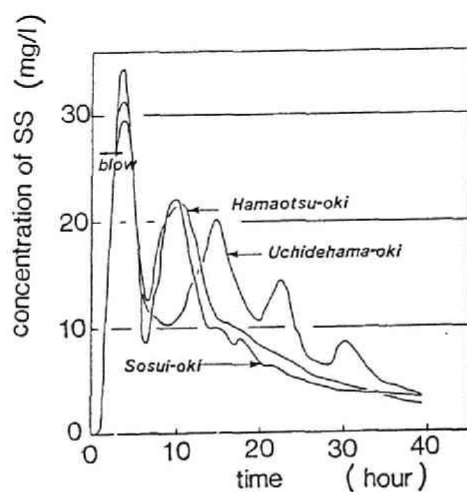


図 1.3.11 強風に対するSS濃度の応答

time = 1 ~ 3 hour に南風 30 m/s が吹いた場合。
三保ガ崎水位 B.S.L. + 0 m, 瀬田川流量 60 m³/s,
疎水流量 20 m³/s。

1. 3. 11 は短時間の突風があった時の湖内定点における浮遊物質濃度の時間的变化であるが、浅水部において底泥が卓越的に巻き上がり、これが湖水循環によって周期的に観測されるのがわかる。

(5) びわ湖南湖の移流分散能

第 1. 3. 2. 節では乱流拡散係数にふれたが、湖全体の応答からは移流分散能が重要となる。この例として図 1. 3. 12 は湖の北西部にある天神川河口にて水質負荷投入を行った場合の湖内各地点の濃度応答曲線の重心及び分散の変化を記したものである。また表 1. 3. 1 には風況及び湖水位を変化させた時の移流分散係数を示す。

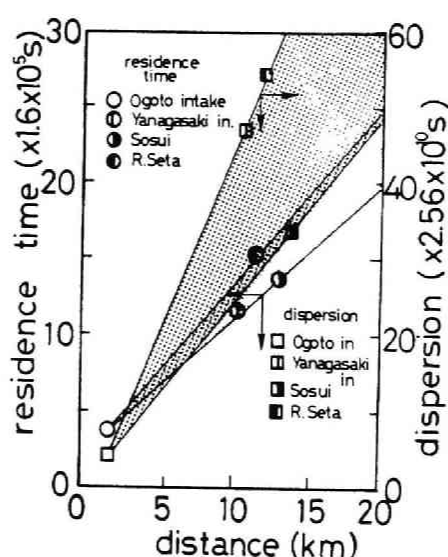


図 1. 3. 12 インパルス応答

瀬田川流量 $60 \text{ m}^3/\text{s}$ ，疎水流量 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ ，三保ガ崎水位 B.S.L.+ 0 m，北風 $2 \text{ m}/\text{s}$ 時のインパルス応答曲線の 1 次・2 次モーメントの変化を示す。

表 1.3.1 びわ湖南湖の移流分散係数

瀬田川流量 $60 \text{ m}^3/\text{s}$ ，疎水流量 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ ，
風速 $2 \text{ m}^2/\text{s}$ とする。

風 向	湖水位 (+BSL, m)	疎 水 口		瀬田鉄橋	
		$u (\text{cm/s})$	$D (\text{m}^2/\text{s})$	$u (\text{cm/s})$	$D (\text{m}^2/\text{s})$
北	0.5	0.5	10.0	0.7	12.8
	-1.5	0.7	10.0	1.4	72.1
東	0.0	0.5	3.8	0.7	6.7
	-1.5	0.7	14.9	0.8	10.7
西	0.0	0.6	12.1	1.0	19.5
	-1.5	1.0	27.6	1.0	6.6
南	0	0.6	6.6	0.8	15.0

天神川に負荷投入した場合のモーメント法による移流速度(u)，移流分散係数(D)，を示す。
上流観測点は雄琴浄水場取水点とし下流観測点を疎水口，瀬田鉄橋とする。

以上本節では有限要素法による湖水質流動モデルのびわ湖への適用結果を概説した。その結果，本モデルにより本節が目的とした範囲での湖水質流動挙動は再現されていると言ってよく，湖水質管理を行う上で有力な具となり得ると考えられる。

引用文献

- 1) Loucks, D. P., Stedinger, J. R., and Hauth, D. A. (1981): Water resources systems planning and analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- 2) 松岡譲・内藤正明(1983): 水質観測点の適正配置に関するシステム解析. 国立公害研究所研究報告, 第48号.
- 3) Matsuoka, Y., Sumitomo, H. and Iwai, S. (1977): An estimation of pollution sources with monitoring of river water quality. Symposium on Environmental System, Planning, Design, and Control, International Federation of Automatic Control, Kyoto, 9 - 16.
- 4) 松岡譲・住友恒・岩井重久(1977): 下流水質による汚濁源の解析. 第13回衛生工学研究討論会講演論文集, 土木学会衛生工学委員会, 31 - 36.
- 5) 住友恒・松岡譲(1977): 京都市における水質管理システムに関する研究. 京都市衛生局公害対策室.
- 6) 例えば今里哲久・金成誠一・国司秀明(1971): びわ湖の水の流動に関する数値実験的研究. 京都大学防災研究所年報, 14 B, 451 - 464.
- 7) 松岡譲・住友恒・岩井重久(1978): びわ湖南湖における水質の有限要素法による解析. 水質汚濁研究, 1(2), 115 - 126.
- 8) 岩井重久・住友恒・松岡譲(1979): 琵琶湖・湖南中部浄化センター建設にかかわる調査研究報告書. 滋賀県委託.
- 9) 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所他(1978): 昭和52年琵琶湖南湖の水理と数値予測に関する検討業務報告書. 琵琶調受77-2032.
- 10) 大久保明(1970): 海洋乱流・拡散. 海洋物理 I, 海洋科学基礎講座, 東海大学出版会, 東京
- 11) 松岡譲・住友恒・岩井重久他(1978): びわ湖における重金属汚染の有限要素法による解析. 第12回水質汚濁研究に関するシンポジウム講演集, 日本水質汚濁研究会, 88 - 94.
- 12) 松岡譲・住友恒・岩井重久(1978): びわ湖南湖の有限要素法によるシミュレーション. 京都大学工学部衛生工学科創立20周年記念衛生工学研究シンポジウム講演論文集, 81 - 86.

- 13) 松岡讓(1978): 湖水水質のコンピュータ解析, 琵琶湖総合開発に係る湖面低下の対策に関する調査研究, 第2.2節, 京都大学工学部衛生工学教室水道工学研究室.
- 14) 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所他(1977): 昭和51年度琵琶湖南湖湖流航空写真撮影作業報告書.
- 15) Csanady, G. T. (1982): Circulation in the coastal ocean. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland.

第2章 富栄養化モデル¹⁾

本章では水質変化機構が複雑であり、そのモデル自体が開発途中とされている湖沼富栄養化モデルについての検討を行なう。対象場としては我国第2の湖面積を持ち富栄養化度も極めて高いとされている霞ヶ浦を対象とする。富栄養化現象を数理モデルで記述しそれを利用して水質予測を行おうとする試みは1970年代初期から始められ、各国湖沼において様々な努力が試みられてきた。我国においてもこの頃、井上²⁾によるダム湖の生態モデル構築が行われている。その後、DiToro, Thomann ら³⁾のグループによる米国五大湖富栄養化モデルの影響を受け、植物プランクトン・動物プランクトンの食物連鎖と藻類・デトリタスの沈降による系外除去を基本とするタイプのモデルがいくつかの湖に適用されるようになった。^{4), 5), 6)}この考え方は、湖水深が比較的大きく、魚類などの影響を無視できる時には適用可能であろうが、霞ヶ浦西浦のように平均湖水深4 m、年間漁獲量 $60 \text{ g WW/m}^2/\text{y}$ にもなる湖に対しても適用し得るかは疑問である。

霞ヶ浦はその水資源的、水環境的価値が高いことから、従来から多くの研究者により富栄養化機構の解析が行なわれ特に国立公害研究所では1976年～1983年にわたり細密な現地調査及び湖内の生態系動力学に関する各種パラメータの測定を行い、湖動態に関する情報収集に努めてきた。⁷⁾

本章ではこれらの情報、及び上記のような問題点を受け、次に示す諸点を目的として富栄養化モデルの構築を図っている。

- (1)霞ヶ浦富栄養化現象に関し従来から集積されてきた知見を総合化し、相互間の整合性について検討すること。
- (2)霞ヶ浦において計画されている水質管理施策に対しその効果予測を行うこと。

富栄養化現象の多くは水域長に比べ水の滞留時間が大きい場にて発生する。さらには水深が小さく風による吹送・セイシュなどの水流攪乱が強い水域では縦方向ペクレ数（ボーデンシュタイン数）が小さくなり、水質の空間的变化を細かく追跡する必要性が小さくなる。また、実際場での水質、特に生物現象に関連したものの流動現象を詳述することは困難な点が多い。以上の見地から本

章では流動現象を比較的近似度が低いと考えられるボックスモデルにより表現している（第2.1節）。

富栄養化現象には湖をめぐる種々の因子が関連する。これらのうち湖流域に関連するものとして栄養塩の負荷状況がある。また湖内での水質変化に関連するものとしては藻類、各種動物、バクテリア等の動力学、および物理・化学的な原因による変化機構等を掲げることができ、それらの重要性を一つ一つ吟味しモデル化する必要がある。第2.2，2.3節においてその概略を述べる。以上にて構築されたモデルは第2.4，2.5節にて検定され、その結果の解釈が試みられる。

2.1 流動モデル

霞ヶ浦西浦の流動に関しては佐々木、南部など幾つかの研究がある。中でも村岡・福島⁸⁾は現地観測、水理実験、数値解析等の各手法による結果を総合し、

- 1) 湖流の主成分としては吹送流及び吹送開始・停止が原因となって発生するセイシュが大きい。
- 2) 吹送流は定常的あるいは非定常的な水平・鉛直循環流を発生させる。

などを得、さらに有限要素法による水平2次元1層の流動計算を行い、湖水域を図2.1.1のように4分割した際の境界面における混合交換流量を表2.1.1のように推定している。本モデルではこの分散効果を混合の主因とし、これに流出流量による移流を合わせたものを流動モデルとする。モデル型としては現象解析の空間スケール、及び観測データの取得密度から、従来からこの種のモデルに多用されてきたボックスモデル（完全混合槽列モデル）を基本とするが、本例のような粗大分割では移流に伴う擬似拡散効果が大きくなり分割誤差を無視し得ない。例えば、高浜入セクション（セクション1）での移流速度を 0.1 cm/s 、セクション長を 10 km とすれば擬似拡散係数は $0.1 \times 10^6 / 2 = 0.5 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ となり表2.1.1から逆算した拡散係数とほぼ同オーダーとなる。この誤差はセクション間の移流濃度を境界面での濃度とせずに上流側セクションの平均値と仮定するために生じたものであり、本節ではこれを修正するために境界面濃度として上下流セクションの重み付き平均を採用する。本法による水質収支

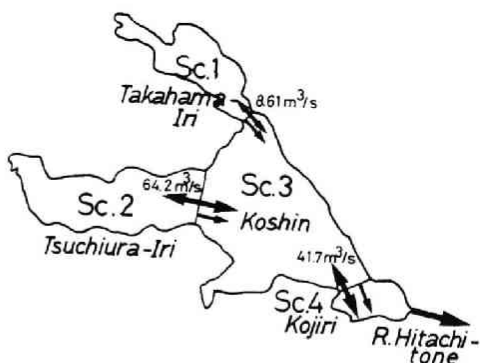


図 2.1.1 湖内 4 分割図

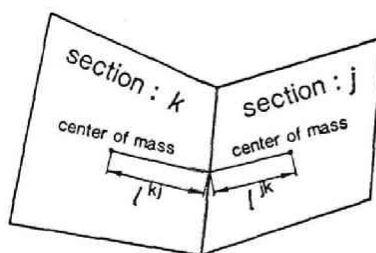


図 2.1.2 セクション概念図

式は次のようになる。

$$\frac{dV^k c^k}{dt} = \sum_j \left[-Q^{kj} (\alpha^{kj} c^k + \beta^{kj} c^j) + EA^{kj} (c^j + c^k) \right] + R^k + W^k \quad (2.1.1)$$

ここに c^k : 第 k セクションの水質濃度, V^k : 同容積, Q^{kj} : 第 k セクションから第 j セクションへの移流流量, EA^{kj} : 第 k, j セクション境界の交換流量, R^k : 第 k セクションの反応速度, W^k : 第 k セクションへの負荷, α^{kj}, β^{kj} セクション分割に関する係数である。 α^{kj}, β^{kj} は図 2.1.2 のようなセクション配置にて

$$\alpha^{kj} = 1 - \beta^{kj} = \frac{l^{jk}}{l^{kj} + l^{jk}} \quad (2.1.2)$$

表 2.1.1 セクション間交換流量及び α, β

	$EA \text{ (m}^3/\text{s)}$	α	β	(k, j)
断面 I	8.61	0.63	0.37	(1, 3)
II	64.2	0.36	0.64	(2, 3)
III	41.7	0.19	0.81	(3, 4)

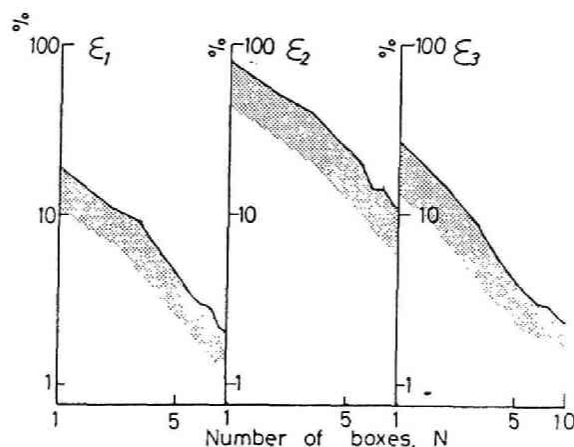


図 2.1.3 ボックスモデルの近似誤差

とした。式 (2.1.1) 中移流拡散に関する項をまとめ行列 A で表せば

$$\frac{dV^k c^k}{dt} = \sum_j A_{kj} \cdot V^j c^j + R^k + W^k \quad (2.1.3)$$

となり以下本式を水質収支式の表現とする。

移流流量 Q^k は河川流出，湖面降水，湖面蒸発など流入・流出 8 要素から各セクション毎に総和・流出量を求め，それから推定している。

本章で取り上げたようなボックスモデルでは空間的な水質分布の表現力がある程度低下することはやむを得ないが，その程度をあらかじめ推定しておくことが必要であろう。その一つの試みとして，図 2.1.3 は湖を流下方向一次元移流拡散モデルで近似しこれを差分法によって比較的厳密に解いた時（差分法，メッシュ数 200）とボックスモデルによる近似値とを比較したものである。近似度を表現するパラメータとしては

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \max_j \left| \bar{c}^j - c^j \right| / c^*_{\max}, & \varepsilon_2 &= \max_j \left(\max_{\text{セクション } j \text{ 内}} \left| c^* - c^j \right| \right) / c^*_{\max} \\ \varepsilon_3 &= (\bar{\bar{c}} - \bar{c}^*) / \bar{c}^* \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

を採用した。ここに c はボックスモデル計算濃度、 c^* は移流拡散モデルの解濃度、添字 $-$, $=$, j 及び \max はセクション内平均, 全水域内平均, 第 j セクション, 及び全水域内最大値としている。各パラメータはそれぞれ ε_1 : 水域内での全体的変動再現性を示す, ε_2 : セクション内での一定濃度假定の近似度を示す, ε_3 : 全水域平均値の再現性を示すものである。比較に使用した移流拡散式は

$$E \frac{d^2 c^*}{dx^2} - u \frac{dc^*}{dx} + R = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\left[u c^* - E \frac{dc^*}{dx} \right]_{x=0} = q_0, \quad \left[\frac{dc^*}{dx} \right]_{x=L} = 0$$

である。ここに E : 拡散係数, u : 流速, q_0 : 上流端からの負荷量, L : 水域長である。 R は反応速度であり 2 種の反応質を考えそれぞれが

$$R_1 \text{ (水質 1 の反応速度)} = -\mu \frac{c_1^* c_2^*}{k'_{1/2} c_{1\max}^* + c_1^*}$$

$$R_2 \text{ (水質 2 の反応速度)} = \mu \frac{c_1^* c_2^*}{k'_{1/2} c_{1\max}^* + c_1^*} - R c_2^*$$

なる反応型をもつものと仮定した。流動パラメータ値としては村岡ら⁹⁾による $L = 26 \text{ km}$, $E = 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.17 \text{ cm/s}$ とし, 反応パラメータとしては $\mu = 0.05 \sim 3.0/\text{d}$, $k'_{1/2} = 0.1 \sim 1.0$, $R = 0.1/\text{d}$ とし、以上の範囲及びセクション長が最大/最小 ≤ 2 となる場合についてパラメータ値の模擬発生を行い, ε (両水質のうち大きい方を採用) を算出している。これから例えば, N (セクション分割数) = 3 とすれば, ε_1 , ε_3 は 10% 程度となることがわかる。すなわち霞ヶ浦全水域を 4 セクション (土浦入-湖心-湖尻及び高浜入-湖心-湖尻の各ラインでそれぞれ 3 セクション) とした時, 誤差見積りとしては上記程度のものを覚悟する必要があるだろう。

2.2 外部負荷モデル

本モデルにおいて取り上げられた外部負荷は a) 河川流出負荷, b) 降水負荷, c) 養殖負荷, d) 下水道負荷である。a) の河川流出負荷は c), d) 以外の流域発生負荷をすべて含み, 総負荷量の大部分 (TP : 65 %, TN : 80 %) を占める。算出は国立公害研究所, 茨城県などが実施した週 1 回程度の頻度をもつ intensive survey のデータ (9 河川), 及び建設省により実施された流出負荷量毎日データ (3 河川) をもとに作成した流出負荷モデル (タンクモデルを中心とする) によった。但しこのモデルは, 検定データ・検定適合度などから判断して霞ヶ浦西浦に注ぐ主要 27 河川中 8 河川のみ (流域で 40 % 程度) に適用されると考えられ, 残流域分は別途に流域を 1 km メッシュに分割し原単位法

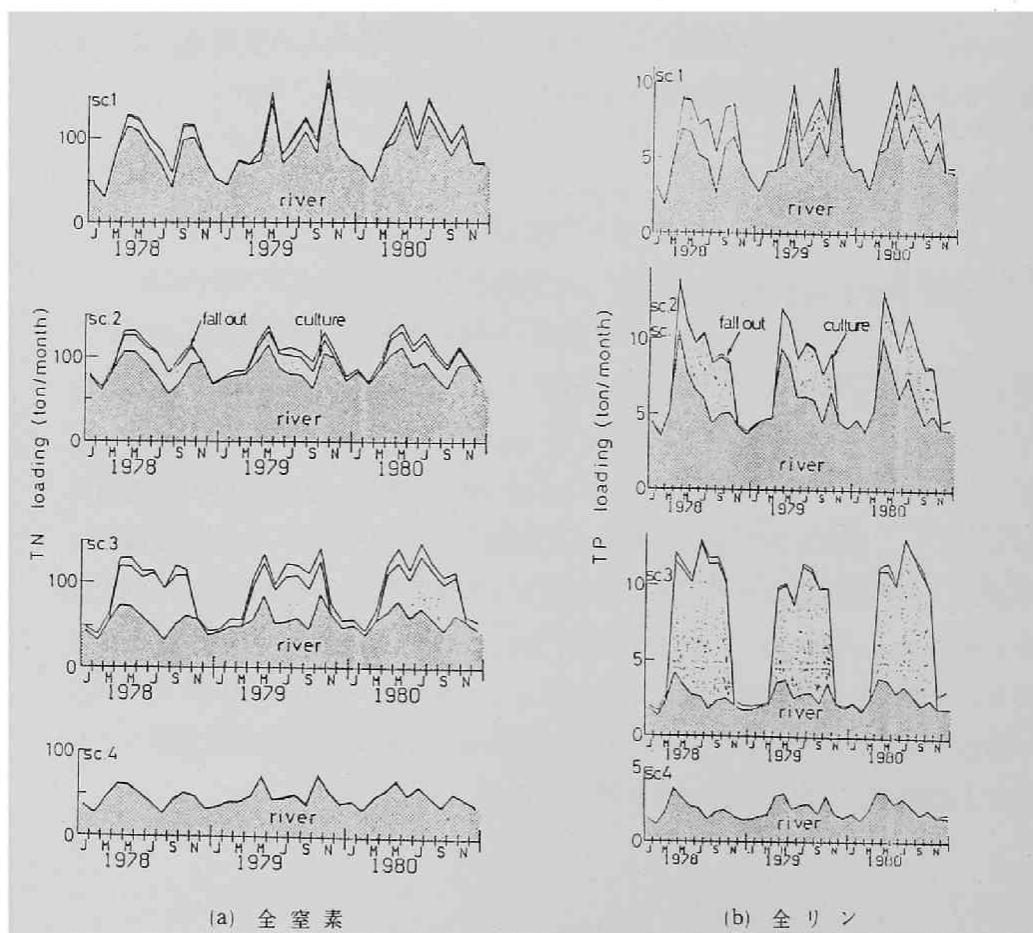


図 2.2.1 外部負荷

によって算出した値を使用した。b)の降水負荷は流域内の国立公害研究所敷地内にて実測された面積負荷量から求め、c)の養殖負荷量はコイ生産量、増肉係数、餌・魚中の栄養塩含量及び給餌率表から未回収分栄養塩量として推定したものをを用いた。b)の下水道負荷は湖北流域下水道霞ヶ浦浄化センターによるもので、報告放流量、同濃度値から推定した。負荷算出時間単位は1カ月であり各セクション毎に別々にTP、DIP、TN、DINの各項目を計算した。算出負荷総量はTP：23.6 t/月、TN：279 t/月であり、茨城県、建設省による値であるTP：16.4～37 t/月、TN：226～280 t/月とほぼ一致する。なお、図2.2.1に結果の一部を示す。

2.3 湖水質変化の動力学

霞ヶ浦にて開発された生態モデルとしては既に藻類動力学を中心とする津野¹⁰⁾、宮崎・中杉¹¹⁾のもの、あるいは魚類を中心とする北畠¹²⁾のものがある。またCODを指標とするモデルとしては建設省¹³⁾によるものがあるが、これらはいずれも地域、コンパートメントにおいて片寄りがあり、湖内栄養塩の循環を把握するには必ずしも十分ではなかった。そこで、本節では、従来から霞ヶ浦湖水質変化に関し得られている諸情報を総合化し各コンパートメントに関するサブモデルの構成を行っている。図2.3.1は本モデルで設定したコンパートメントの間の関連を示したものである。これの特徴としては

- 1)植物プランクトンをラン藻とそれ以外の藻類(ケイ藻が主成分を占める)

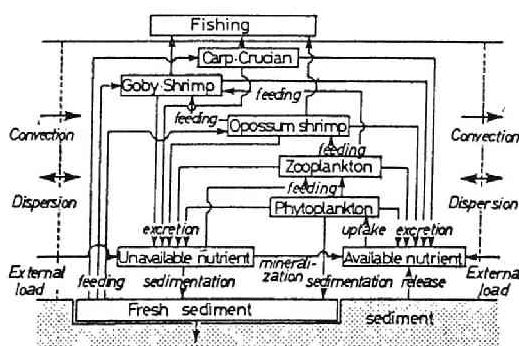


図 2.3.1 モデル概念図

に2分し、藻類中に含まれる窒素・リン量は生体量とは別に計算する。

2) 魚類・アミ類にも比較的重点を置く。

があげられる。以下、植物プランクトン、動物プランクトン、魚類・アミ類、栄養塩循環の各サブモデルについて述べる。また表2.3.1に動力学モデル作成にあたり参照したデータの概略を記す。

表 2.3.1 本節で作成した動力学モデルとその基礎データ

process control factor	model	description
Phytoplankton growth light	Smith's eq. (blue-green) Vollenweider's eq. (other)	parameter fitting with the data of simulated in situ method of photo-synthesis light curve, measured every month (F)
temperature	line functions	experiments used Kasumigaura algae (K,E,L)
int. nutrient	Droop's eq.	parameter fitting with batch culture experiments (K,E,L)
uptake ext. nutrient	Michaelis-Menten eq.	the same as above (K,E,L)
int. nutrient	Lehman's eq.	the same as above (K,E,L)
respiration		
temperature	exponential eq.	in situ dark bottle method (F)
refractory ratio of excreta		(L)
sinking	constant velocity given every month	in situ trapping technique (F)
Zooplankton feeding food concentration	Michaelis-Menten eq.	experiments used Kasumigaura species (K)
food selectivity		the same as above (K,L)
temperature	exponential eq.	the same as above (K,L)
growth assimilation coefficient	constant	the same as above (K)
respiration		
temperature	exponential eq.	(L)
refractory ratio of excreta		(L)
Fishes and opossum shimp feeding food concentration	Michaelis-Menten eq.	(L)
food selectivity		gut analysis etc. (F,K,L)
growth rate (net)		field measurements (F,K)
assimilation coefficient	constant	(L)
respiration		
temperature	exponential eq.	(L)
body weight	power eq.	(L)
refractory ratio of excreta		(K,L)
External nutrient mineralization		
temperature	exponential eq.	(K)
settling	constant velocity given every month	(F,C)
elution	constant value given every month and section	core sampling method (F)

Growth of zooplankton and fishes are modified with O'Neill, Kitchell's eq. in order to account for the community behavior.

F=in situ or simulated in situ measurement K=experiments using water or strain from

Lake Kasumigaura E=experiments using water or plants not from Lake Kasumigaura

L=literature C=calibration

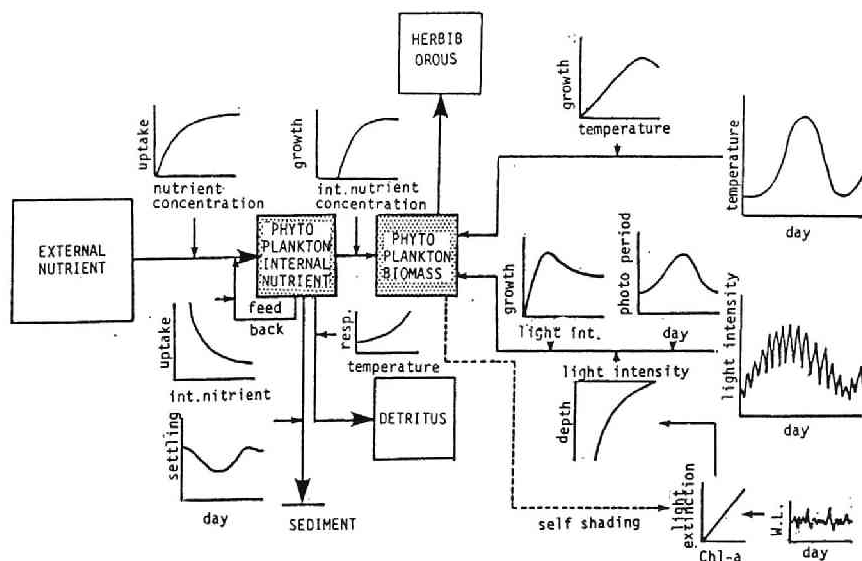
2.3.1 植物プランクトン(図2.3.2)

植物プランクトンモデルとしては Riley 以来使用されている式形である

$$\frac{dP}{dt} = A \cdot P + (G^P - R^P - W^P) \cdot P - GZ^P \quad (2.3.1)$$

を使用する。ここに P : 藻類現存量(t), A : 移流混合を示す行列(式2.1.3), G^P : 成長速度 (1/d), 及び GZ^P : 被食による減衰速度 (t/d) である。モデル化する種は(i)夏期優先種となるラン藻, 特に *Microcystis* が群体を形成し動物プランクトンによる被食圧から逃れていること, (ii)同じく *Microcystis* は気胞形成による上下運動を行い光合成を行うに有利な位置を占めること, (iii)ラン藻の成長温度特性は他のそれに比べかなり異っていること, の理由により“ラン藻”, “それ以外の藻類”とした。総成長速度 G^P の影響因子には, (i)光強度, (ii)水温, (iii)内部栄養状態を取り上げている。いずれの因子も現場藻類を用いた培養実験¹⁴⁾ からその形式, パラメータ値を決定した。光強度の水中での減衰, 日内変動の影響については消散係数 k_d をクロロフィル a の関数として回歸し光強度変化パターンを可照時間を一辺とする矩形状パターンによって近似し補正を加えている。栄養状態として内部栄養塩を指標に取り上げた理由は

図 2.3.2 植物プランクトン動力学



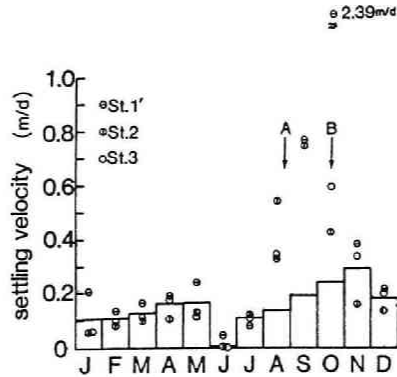


図 2.3.3 植物プランクトン沈降速度

霞ヶ浦高浜入にて観測されたもの。1981 年 7 月～1982 年 6 月，A：台風 198115 号，B：198124 号。

(1)卓越種 *M. aeruginosa* の栄養塩摂取・増殖特性が室内実験により比較的明確にされること。

(2)外部栄養塩を指標としモノ一型の 1 段階モデルを仮定してみると，一次総生産量，外部栄養塩濃度，水温，光強度から逆推定した成長半飽和定数が安定せず，時によっては負となること。あるいは夏期藻類の光強度に対する最大総成長率を水温一定にし，外部栄養塩濃度との関係をプロットすると時間的にヒスリシスを描くこと。

など¹⁾が上げられる。

R^P は擬似現場法で得られた水温に対する指数型を使用する¹⁵⁾。 W^P は沈降速度を w^P ，水深を h として w^P/h として求めた。ここに w^P は現場 3 地点にて実測された新生堆積物沈降速度¹⁶⁾から月毎に求めている(図 2.3.3)。この結果は 0～239 m/d とばらついているが，6 月に関してはラン藻が卓越するため，8～10 月は風雨による湖水擾乱の影響を受けたものと考えられる。したがってこの 4 ケ月については隣接月から内挿し，6～8 月のラン藻については $w^P = 0$ としている。

2.3.2 動物プランクトン(図 2.3.4)

霞ヶ浦産の動物プランクトンは藻食性のものがほとんどであり，*Moina* を除けば *M. aeruginosa* も摂食しない。しかるにイサザアミ・魚類による被食圧は

かなり強いものと考えられている。動物プランクトン動力学の基礎式としては式(2.3.1)と同じく

$$\frac{dZ}{dt} = A \cdot Z + (G^Z - R^Z) \cdot Z - GZ^Z \quad (2.3.2)$$

を仮定する。ここに Z ：動物プランクトン現存量(乾重 t)であり、他は植物プランクトンと同様である。成長速度 G^Z は(i)被食物濃度、種類、大きさ、(ii)水温、(iii)動物プランクトン自身の密度、(iv)同化率などに影響される。(i)に関し、霞ヶ浦産の *Diaphanosoma brachyurum* に *Chlamydomonas* を摂食させた室内実験¹⁷⁾ではミカエリス型によって表現可能であり、水温依存型は指数あるいは直線型をなす。また同化率は實際上問題となる餌密度範囲ではほぼ一定であり、この傾向は霞ヶ浦産の他の動物プランクトン(*Basmina*, *Moina*, *Diatomus*)でも替わらない。(iii)の動物プランクトン自身の密度による影響は若干の研究が行われているものの、現在の所、明瞭な成果は得られていない。したがってもっとも簡単な線型フィードバックを考え、そのパラメータは検定によることにした。霞ヶ浦産動物プランクトンは上にも述べたように夏期優先種 *Microcystis* をあまり摂取できない。その代替としてデトリタス、バクテリアを摂取していると考えられ、モデルではその選択係数をラン藻：その他藻類：デトリタス＝

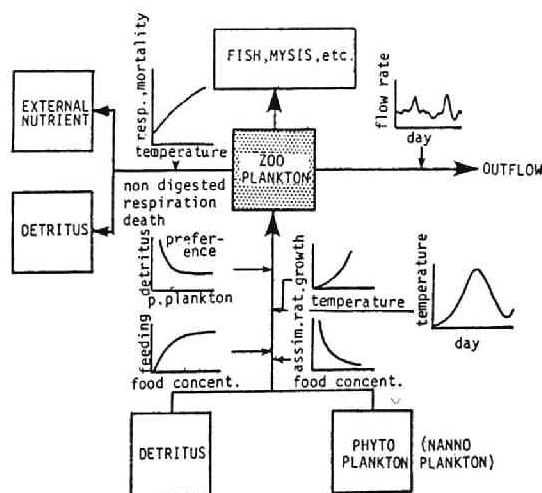


図 2.3.4 動物プランクトン動力学

0.2 : 1 : 1 としている。霞ヶ浦産動物プランクトンの R^Z に関する報告は見当たらないが、Leidy ら¹⁸⁾ は数多くの文献値を収集報告しており、これらを参考にし $Q_{10} = 2.82$, 20°C で 0.15 (mgC/mgC/d) とした。

2.3.3 魚類・イサザミ (図 2.3.5)

霞ヶ浦西浦は面積当りの漁獲量が $60 \text{ g WW/m}^2/\text{y}$ 程度 (養殖を除く) にも達するが、漁獲の大半はハゼ、フナ、コイ、及びエビ、イサザミなど底棲種によって占められている。フナ、コイを除けばいずれも年間漁獲率は 70 ~ 90 % 以上と考えられており、平均寿命は 1 年以下である。これらの動物の成長、生活史等は他湖のそれに比べれば比較的よく知られているものの不明な点が多く、サブモデル構成にあたっても推定に頼る所が多くなる。

上記 5 種はさらにイサザミ、ハゼ・エビ、コイ・フナの 3 種にコンパートメント分けされ、各コンパートメントに関する情報に基づき逐次、モデル化が行われた。基本式はいずれも

$$\frac{dFI}{dt} = (G^{FI} - R^{FI}) \cdot FI - GZ^{FI} - FC \quad (2.3.3)$$

で表される。ここに FI : 現存量 (tWW) であり FC : 漁獲量 (tWW/d) で

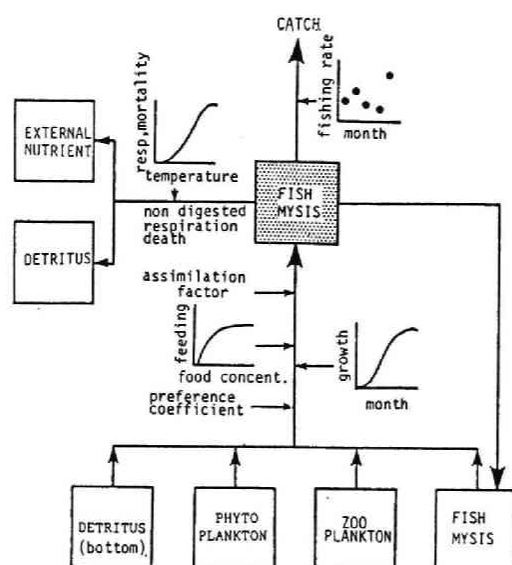


図 2.3.5 魚類・イサザミ動力学

ある。動物プランクトンで述べた如く、 G^{FI} は環境諸因子及び年令構成の影響を受けるが、これを演繹的に組合せることはせず、観測個体重の変化から逆算している。但しイサザアミについては村野¹⁹⁾の観測に基づく推定値を与えている。また、以上の値はいずれも標準的な1個体のそれに相当するものであり、年令構造・飽和効果・再加入等の修正が必要となるが、本モデルでは Kitchell ら²⁰⁾の方法によりそれを行っている。このモデルは年令構造補正係数など意義が不明確なパラメータを含み、その数値も検定によって推定せざるを得ない。 G^{FI} を接餌速度に変換するには同化率が必要である。本モデルではハゼ・エビの同化率は従来値 0.8 とするがイサザアミについては他湖産種の値から動物プランクトンと同一値と考える。餌選択性に関しハゼについては比較的詳細な調査がなされておりそれを参考に各月毎の選択係数を決定した。イサザアミは第1に動物プランクトンを、不足分は湖底からベストス・デトリタスを摂餌すると考える。

異化速度 R^{FI} 中、自然死速度は通常無視できるオーダーである。残りの代謝量に関しては Winberg (魚類), Ivlev ら (魚類, 甲殻類など) などによる個体重との関係式がよく知られており、現場での代表個体重変化を追跡することによって推定可能である。同化率、異化速度に不明な点が多い場合には摂餌効率 20% を仮定し成長速度から摂餌速度、異化速度を推定することもできコイ・フナにはこの方法をとった。

また漁獲量 FC は下に述べる推定現存量及び報告漁獲量を用い漁獲死亡率 f_c を算定し、これを与パラメータとしてモデルに組み込んだ。その際、漁獲死亡率 f_c は年内同時期には同一である (霞ヶ浦での漁業操業パターンは漁業調整規則などの制限を受け規則的な年内変動をもつ) と仮定し 1978 ~ 1980 年 1 ~ 12 月の各月平均値を算定し使用している。なお、この方法では操業の経年変動には対処できず、図 2.4.1 (f) にもその影響が顕われている。

魚類に関し問題となる点に現存量推定がある。沖帯における現存量調査はしばしば行われているが、漁獲量を維持するにははるかに及ばない。したがって、本研究では個体重変化から求めた成長速度、毎月漁獲量及び年間漁獲率一定の仮定から求めた現存量変化パターンが、漁獲統計調査から求めた CPUE 変化パターンと最も高い相関をもつ時の現存量を推定値とした。

2.3.4 栄養塩循環（図 2.3.6）

湖水中の栄養塩循環に関しさらに幾つかの検討すべき問題が残っている。以下それらについて列記する。

(1) 栄養塩無機化 — 外部負荷，生物からの排出・死亡によって生ずるデトリタス成分，あるいは有機態状の栄養塩は様々な作用によって無機化され，再び藻類に供される。それらのうち例えば藻類の枯死直後に開始される貯蔵性有機物の分解などきわめて急速なものはこのプロセスに入れるよりも排出形態比によって処理する方が適当である。霞ヶ浦湖水を使用した無機化速度測定実験²⁰⁾をまとめてみると $Q_{10} \cong 2$ ， 20°C においては $0.01 \sim 0.05$ ($1/d$ ，リン) $0.01 \sim 0.1$ ($1/d$ ，窒素) 程度の範囲¹⁾となっている。

(2) 生物からの栄養塩放出形態 — 生物からの栄養塩放出形態，速度について近年多くのモデル化が試みられているが，それらの一般性は今だ不明である。したがって本モデルでは従来から多用されてきた方法である現存量減衰速度 (R^P ， R^Z ， R^{FI} など) に体組成比を乗じたものを代謝排泄速度とし，これに不消化排出分を加えた。放出形態に関しては測定が行われつつあるが，現在のいずれも信頼度が高いものではなく，今後の研究によって改良する必要がある。

(3) 湖底からの栄養塩回帰 — 浅湖においては栄養塩の底泥からの回帰が湖水質に重要な影響を及ぼす。回帰の原因としては(a)静止溶出，(b)物理的攪乱，(c)生物による底泥からの直接的な摂取・排泄に伴うものなどがある。静止溶出に関し細見²²⁾は擬似現場実験を行っているが，本モデルではこのデータを水域ごと，月単位にまとめ外部負荷と同様に取り扱った。物理的攪乱としては風波，生物，漁

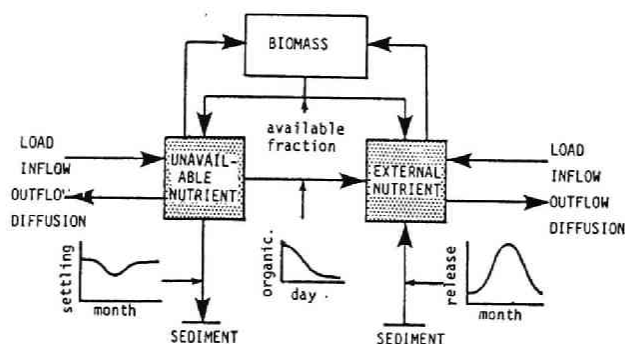


図 2.3.6 栄養塩動力学

網などがあるが、湖現場にて計測された底泥巻き上げ速度と、①けずられた底泥中の間隙水栄養塩がすべて回帰するとの仮定、あるいは②室内実験による底泥 1 g 当りの物理的攪乱溶出測定値と組合わせ、物理的攪乱による回帰速度を年間各月毎に推定してみると、大半の期間で静止溶出量をかなり下まわった¹⁾。したがって本モデルではこれを無視した。

生物、特に魚類・イサザアミによる底からの栄養塩回帰はそれらの摂餌過程を追跡することにより推定できる。但しこれらの動物は直接底から摂食する他に、攪乱によって巻き上がったものを摂食しているとも言われるがその区別は本質的でない。一方ユスリカ羽化によっても底泥中栄養塩は水中に回帰する。羽化量を 20 g DW/m^2 、内 50 % が魚類によって捕食されと考えれば、²³⁾ 測定体組成比から水中に回帰する栄養塩量は 70 mg P/m^2 、 670 mg N/m^2 となる。この値は羽化期間中の物質循環には大きな影響を与えるものの、①年平均的には魚・イサザアミの底泥からの年間摂食量に比べはるかに小さい、②魚類・イサザアミの摂餌に伴う回帰量に計上されているはずであるとの理由から特に考慮しない。

(4) 動物（魚類・イサザアミ）による湖底デトリタス、ベントス摂餌のモデル — 動物による栄養塩取り上げの重要性は霞ヶ浦水産研究者らによって以前より主張されているが、そのメカニズムはほとんど不明である。しかし、本モデルでは魚類成長速度として現場観測値を用いているから魚類生活環境が大きく変化しない限り、この観測成長速度を賄うに必要な栄養塩量を湖底から取り上げると仮定することによって栄養塩移動量を算出することができる。但しこの方法では外部負荷削減などによる湖環境変化時に対応することはできない。したがって本モデルでは次のような操作を行っている。

1) 湖底にて魚類・イサザアミが摂取可能である“フレッシュな有機物”なるコンパートメントを想定する。このコンパートメントに対する入力是有機粒状栄養塩及び植物プランクトンの沈降分であり、出力は魚類・イサザアミによる摂餌及び 1 次反応によって表される腐敗である。腐敗速度は沈降物中のクロロフィル a 減衰測定値、実験水槽での魚類・イサザアミの底質摂餌実験などから $0.108 / \text{d}$ (20°C) 及び $Q_{10} = 2$ とする。

(2) “フレッシュな有機物” 摂餌速度をミカエリス型モデルにより定式化し検

定3ヶ年間で“フレッシュな有機物”現存量を逆算する。摂餌半飽和定数は従来値によると $0.05 \sim 5 \text{ g DW/m}^2 \text{ }^{1)}$ であり本研究でも 2 g DW/m^2 を標準値とする。検定期間以外での“フレッシュな有機物”摂餌速度はその時の現存量と検定期間中の同月日の現存量を比較し上記のミカエリス型モデルによって検定期間中摂餌速度を補正し求めた。

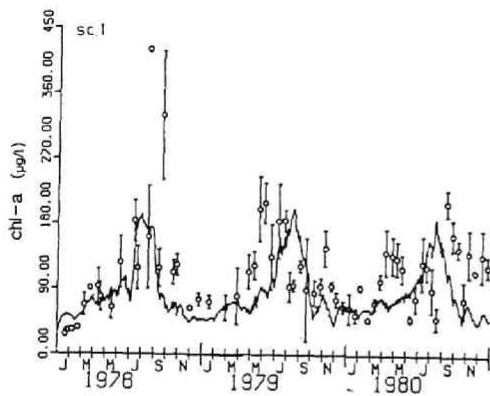
2.4 計算・検定

前節で設定したモデルは高次元の連立常微分方程式となる。個々の方程式導出にあたっては一応の検討がなされているがシステム全体としての挙動が実際に観測値を再現しているかは疑問であり、通常多くの手直しを必要とする。以下では計算結果を中心にこれらの点について概述する。

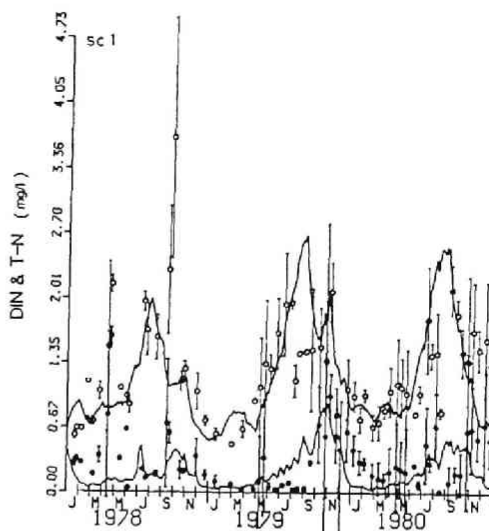
まず常微分方程式の数値解法としては Runge-Kutta-Fahlberg 4.5 次法 (RK45) を使用した。この方法は1段型可変ステップ法に属するものであり右辺評価が容易な non-stiff 方程式用に開発されたものである。プログラムコードも比較的良好に流布されており、本モデルでは Malanchuk ら²⁴⁾ がコード化したもの (RKFS) を一部改変し使用している (相対誤差1%以下, 最大ステップ幅1日)。

表 2.4.1 主たる検定パラメータ

コンパートメント名	記号	定 義	単 位
植物プランクトン	$\hat{P}_{\max i}$	純最大成長速度	1/d
動物プランクトン	c_{\max}^Z	最大密度	g DW/m^2
	θ_{ZG}	摂餌に係る温度係数	[-]
魚類・イサザアミ	c_{\max}	環境容量	g WW/m^2
	P	年令分布に係る補正係数	[-]
栄 養 塩	REM^1	無機化速度@ 20 °C	1/d
	f_{wr}	デトリタス/植物プランクトン沈降速度比	[-]

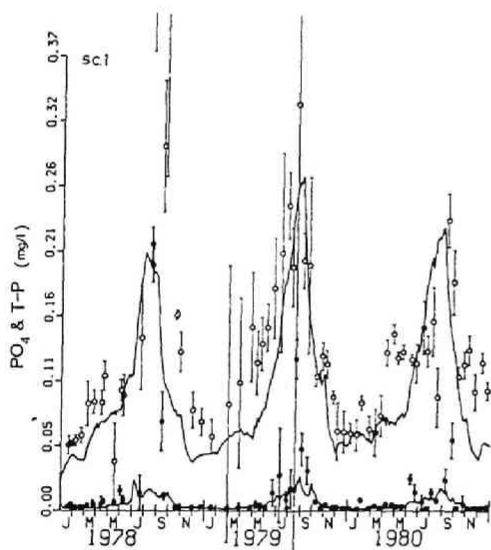


(a) クロロフィル a



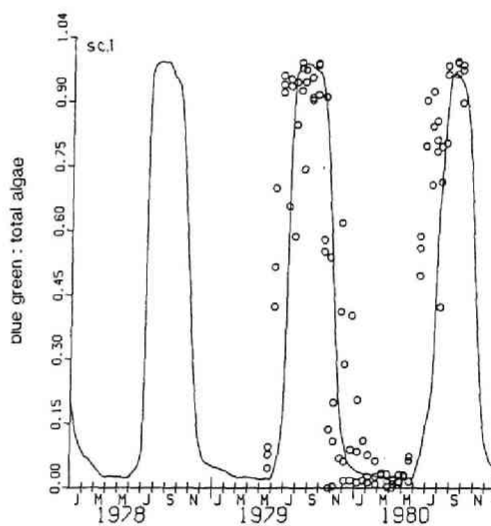
(b) 窒 素

上側の線はT N計算値，下側はD I N計算値を示す。また白丸はT N観測値，黒丸はD I N観測値を示す。



(c) リ ン

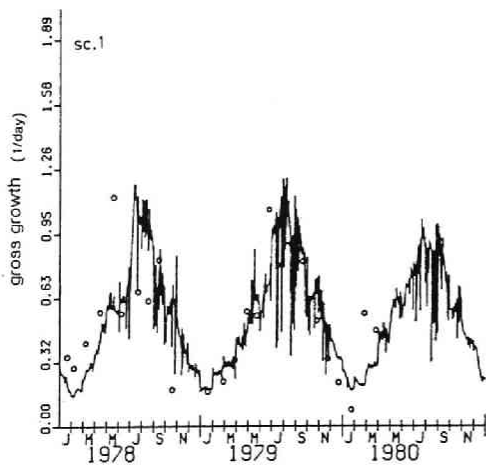
上側の線はT P計算値，下側はD I P計算値を示す。また白丸はT P観測値，黒丸はD I P観測値を示す。



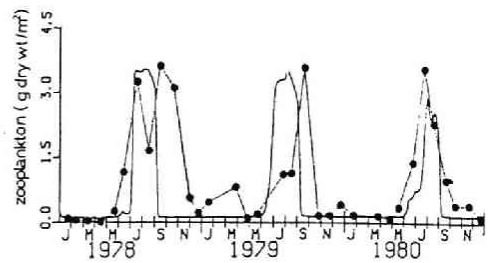
(d) 藻類構成比

図 2.4.1 検定図の例

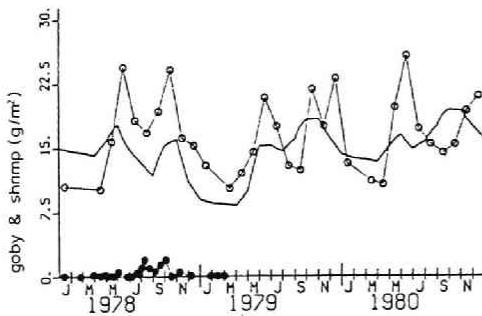
ひげは確率誤差を示す，高浜入。



(e) 総成長率

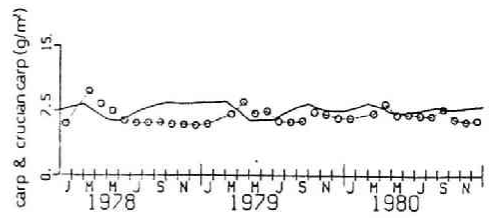


(f) 動物プランクトン
全湖平均を示す。



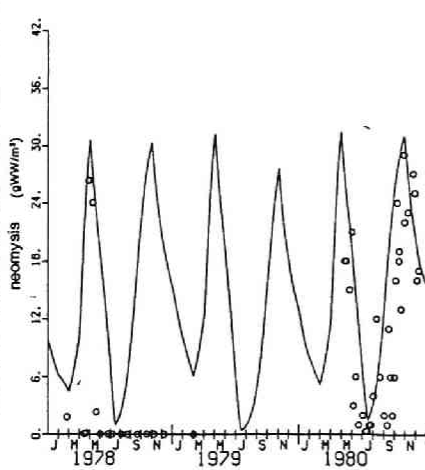
(g) ハゼ・エビ

全湖平均、白丸はC P U Eから求めた現存量、黒丸は高浜入での観測値²⁵⁾である。



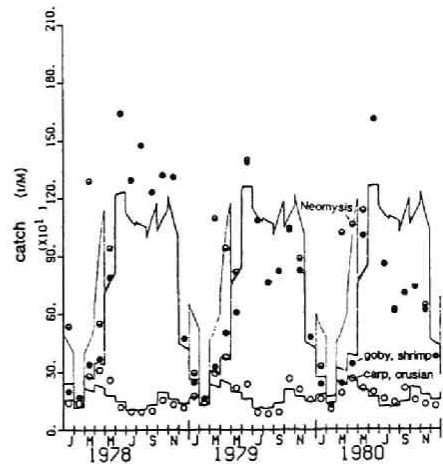
(h) コイ・フナ

全湖平均、白丸はC P U Eから求めた現存量。



(i) イサザアミ

全湖平均、1978年観測値は春日²⁵⁾に、1980年観測値は戸田²⁶⁾による。



(j) 漁獲量

全湖、1月当たり、下からコイ・フナ、ハゼ・エビ、イサザアミを積み重ね記している。

モデルの検定計算は観測データが比較的完備している 1978 年 1 月～1980 年 12 月を対象として行われた。1978 年は夏期の寡雨・高温，1979 年は 6 月の高温，10 月の台風により，1980 年は夏期の低温によって特徴付けられる。検定データとしては国立公害研究所が期間中，湖内 12 点にて観測を行ったものから，継続性，代表性を考慮して 9 測点を選び，ティーセン法によって各セクシ

表 2.4.2 モデル方程式

(a) システム方程式

compartment	symbol	unit	kinetic equation
Phytoplankton biomass i=1:blue green i=2:others	P_i	t DW	$\frac{dP_i}{dt} = A P_i + (G_i^P - R_i^P - W_i^P) P_i - G Z_i^P$ convection growth resp. sedi- grazing by diffusion NPM mentation zooplankton
Phytoplankton internal nutrient	F_{iP} F_{iN}	t	$\frac{dF_i}{dt} = A F_i + U_i P_i - (R_i^P + W_i^P) F_i - G Z_i^P \frac{F_i}{P_i}$ convection uptake resp. sedi- diffusion NPM mentation grazing by zooplankton
Zooplankton	Z	t DW	$\frac{dZ}{dt} = A Z + (G^Z - R^Z) Z - G Z^Z$ convection growth resp. grazing by Neomysis diffusion NPM and goby
Neomysis	N	t WW	$\frac{dN}{dt} = (G^N - R^N) N - G Z^N F C^N$ growth resp. grazing by NPM goby harvest
Goby, Shrimp	GO	t WW	$\frac{dGO}{dt} = (G^G - R^G) GO - F C^G$ growth resp. NPM harvest
Carp, Crucia	CA	t WW	$\frac{dCA}{dt} = (G^C - R^C) CA - F C^C$ growth resp. NPM harvest
Available nutrient	S_P S_N	t	$\frac{dS}{dt} = A S - (U_1 P_1 + U_2 P_2) + a^P R^P (F_1 + F_2) + a^Z EX^Z + a^N EX^N + a^G EX^G + a^C EX^C + REM + DIF + LOAD^S$ convection phyto-p. zoo-p. neo- diffusion excreta excreta mysis uptake excreta excreta mineral- sediment ization release
Unavailable nutrient	O_P O_N	t	$\frac{dO}{dt} = A O + (1 - a^P) R^P (F + F) + (1 - a^Z) EX^Z + (1 - a^N) EX^N + (1 - a^G) EX^G + (1 - a^C) EX^C - REM - W^O - G Z^O + LOAD^O$ convection phyto-p. zoo-p. neo- diffusion excreta excreta mysis excreta excreta excreta mineral- sedi- grazing by ization mentation zoo loading plankton

ン代表水質とした。観測値の代表性、再現性に関しては別途、同水域・同期間での他機関観測値との比較が行われており¹⁾、その結果、(1)縦断的取り扱い (longitudinal あるいは time-series treatment) に対してはある程度移動平均を行う事によって、(2)横断的取り扱い (cross-sectional treatment) に対しては期間中の平均値同志を考えることによって比較的良好な信頼性を期待できることが判明している。検定の対象となったパラメータを表 2.4.1 に一覧するが、これらの推定にあたっては上記のようなデータ特性を配慮する必要がある。検定計算での各コンパートメント適合度を図 2.4.1 に示す。本計算適合度の定量的検討¹⁾によれば longitudinal な適合度相関係数は 0.1 ~ 0.4,

(b) 植物プランクトン

term	symbol	equation	note
growth rate of blue-green algae	G_1^P	$PHT_{max} \frac{PP}{k_e h} \ln \left(\frac{I}{I_k} \sqrt{1 + \left(\frac{I}{I_k} \right)^2} \right) \Big _{I=I_{bottom}}^{I=I_{surface}}$	Smith equation
growth rate of other algae	G_2^P	$PHT_{max} n^2 (n+1)^{-1/2} \frac{PP}{h} \int_{z=0}^{z=h} \frac{1}{I_k} \left(1 + \left(\frac{I}{I_k} \right)^2 \right)^{-n/2} dz$	Vollenweider eq.
	PHT_{max}	$(\hat{P}_{max} G_1^P(T) + R^P) (1 - \frac{f_{P0}}{f_{ip}}) (1 - \frac{f_{N0}}{f_{in}})$	Droop equation
I : light intensity, $I_k = I_{surface} \exp(-k_e z)$, $I_{surface} = I/PP$ (cal/d/cm ²), PP : phot period, I : daily average I extinction coefficient: $k_e = \alpha C_H + \beta$, $\alpha = 0.020/\text{mg chl a/l}$, $\beta = 1.1/\text{m}$, $I_{k1} = PHT_{max}/\phi_1$, $\phi_1 = 0.0384$ $\phi_2 = 0.0403 \text{ cm}^2/\text{d}$, $n = 0.26937$, $P_{max1} = 363$, $P_{max2} = 363/\text{d}$, $G_{T1} = \max(0.025T, 0.05T - 0.5)$, $1/(T > 30^\circ\text{C})$, $G_{T2} = \min(1/14, 1/3 - T/30)$, cell quanta: $f_{ip} = F_{ip}/P_i$, $f_{in} = F_{in}/P_i$, $f_{P0} = 0.001 \text{ g P/g DW}$, $f_{N0} = 0.02 \text{ g N/g DW}$			
respiration rate	R^P	$R^P = \theta_{FR}^{T-20}$, $R^P = 0.1711$, $\theta_{FR} = 1.0489$	
sedimentation rate	W_i^P	w_i^P/h , w_i^P : settling velocity, h : depth	
zooplankton grazing	GZ_i^P	$\frac{G^Z P R^P (c_1^P - c_{1tr}^P) Z}{FA^Z (c_1^P - c_{1tr}^P) + P R^P (c_2^P - c_{2tr}^P) (c_1^P - c_{1tr}^P)}$ or $\frac{G^Z (c_2^P - c_{2tr}^P) Z}{FA^Z (c_1^P - c_{1tr}^P) + P R^P (c_2^P - c_{2tr}^P) (c_1^P - c_{1tr}^P)}$	
G^Z : zooplankton growth rate (1/d), preference ratio of BG algae: $PR^P = 0.2$, $c_1^P = P/V$, V : volume of sc. threshold concentration: $c_{1tr}^P = 0.1 \text{ g DW/m}^3$, detritus concentration: $c_2^P = \min(Q_P/V/f_P^0, Q_N/V/f_N^0)$ $f_P^0 = 0.0085$, $f_N^0 = 0.064$, assimilation coefficient of zooplankton: $FA^Z = 0.38$			
uptake rate	U_i	$U_{max} \frac{c^S}{K_i^S + c^S} \frac{f_{max} - f_i}{f_{max} - f_0}$	Lehman
half saturation coefficient: $K_{1P}^S = 0.025$, $K_{1N}^S = 0.10$, $K_{2P}^S = 0.0083$, $K_{2N}^S = 0.05 \text{ g/m}^3$, c^S : available nu- trient concentration, $f_{Pmax} = 0.0085 \text{ g P/g DW}$, $f_{Nmax} = 0.08 \text{ g N/g DW}$, $U_{max1P} = U_{max2P} = 0.005$ g P/g DW/d , $U_{max1N} = U_{max2N} = 0.02 \text{ g N/g DW/d}$			

0.4, 0.35 ~ 0.5 (Chl-a, TP, TNの順)となり悪いが, cross-sectional
なものは0.99, 0.98, 0.97 (傾きは1.2, 0.74, 0.84, 但しsc. 1, 2,
3 平均値のみ)となっている。表2.4.2にモデル方程式, パラメータ値を付す。

(c) 動物プランクトン

term	symbol	equation	note
growth rate of zooplankton	G^Z	$I_{max}^Z I_c^Z F A^Z (1 - c^Z / c_{max}^Z)$ (1/d)	
nominal maximum grazing rate: $I_{max}^Z = 0.85$, temperature dependency: $I_c^Z = \theta_{zg}^{T-20}$, $\theta_{zg} = 1.15$, assimilation coefficient: $F A^Z = 0.38$, concentration of zooplankton: $c^Z = Z / Ar$, area of sc: Ar $c_{max}^Z = 4.0 \text{ gDW/m}^2$			
food concentration dependency of zooplankton grazing	I_c^Z	$\frac{(c^P - c_{tr}^P) + (c^G - c_{tr}^G) P R^G + (c^O - c_{tr}^O)}{k^Z + (c^P - c_{tr}^P) + (c^G - c_{tr}^G) P R^G + (c^O - c_{tr}^O)}$	
$k^Z = 0.825 \text{ g/m}^3$: half saturation coefficient			
respiration rate	R^Z	$R^Z R^T \theta_{ZR}^{T-20}$, $R^Z R = 0.15 \text{ /d}$, $\theta_{ZR} = 1.1092$	
grazing rate by Neomysis, goby and shrimp	GZ^Z	$\frac{G^N (c^Z - c_{tr}^Z) N r^N}{F A^N (k^N + c^Z - c_{tr}^Z)} + \left(\frac{G^G G^O}{F A^G} - GZ^N \right) \cdot \frac{(c^Z - c_{tr}^Z) r^G}{k^{GZ} c^Z - c_{tr}^Z}$	
G^N : Neomysis growth rate (1/d), G^G : goby and shrimp growth rate (1/d), threshold concentration: $c_{tr}^Z = 0.1 \text{ gDW/m}^2$, dry:wet ratio: $r^N = 0.17$, $r^Z = 0.23$, assimilation coefficient: $F A^N = 0.38$ $F A^G = 0.8$, half saturation coefficient: $k^N = 0.4 \text{ gDW/m}^2$, $k^{GZ} = 0.4 \text{ gDW/m}^2$			

(d) イサザアミ

term	symbol	equation	note
growth rate of Neomysis	G^N	$(G_h^N + R^N) \left\{ 1 + p^N \left(1 - \frac{c^N}{c_{max}^N} \right) \right\}$ (1/d)	Kitchell
net growth rate: G_h^N (1/d), correction coefficient for population distribution: $p^N = 0.1$, $c^N = N / Ar$, Ar : Area of sc, $c_{max}^N = 4.25 \text{ gWW/m}^2$			
respiration rate	R^N	$R^{NR} \theta_{NR}^{T-20}$, $R^{NR} = 0.06$, $\theta_{NR} = 1.116$ (1/d)	
goby and shrimp grazing	GZ^N	$\frac{G^G G^O r^N (c^N - c_{tr}^N)}{F A^G (k^{GN} + c^N - c_{tr}^N)}$ (tWW/d)	
G^G : goby and shrimp growth rate (1/d), $F A^G = 0.8$: assimilation coefficient, r^N : preference factor (Dec-May: 0.4, Jun-Jul15: 0.8, Jul16-Oct.: 0.0, Nov.: 0.2), $c_{tr}^N = 0.5 \text{ gWW/m}^2$: threshold concentration, half saturation coefficient: $k^{GN} = 2.0 \text{ gWW/m}^2$			
harvest	FC^N	$f c^N N$ (tWW/d)	
fishing mortality: $f c^N$ (Jan.=0.00556, Mar.=0.0106, Apr.=0.00148, May=0.00110, Jun.=0.000131, other month=0.0 /d)			

(e) ハゼ・エビ

term	symbol	equation	note
growth rate of goby and shrimp	G^G	$(G_h^G + R^G) \left\{ 1 + p \left(1 - \frac{C^G}{C_{max}^G} \right) \right\}$ (1/d)	Kitchell
net growth rate: G_h^G (1/d), correction coefficient for population distribution: $p^G=0.2$, $C^G=GO/Ar$, Ar : Area of sc, $C_{max}^G=14.0$ gWW/m ²			
respiration rate	R^G	$R^G (we^G)^{-0.19} \theta_{GR}^{T-20}$, $R^G=0.04$, $\theta_{GR}=1.072$	Winberg
we^G : weight of fish (gWW)			
harvest	FC^G	$fc^G \cdot GO$ (tWW/d)	
fishing mortality: fc^G (1/d)			

(f) コイ・フナ

term	symbol	equation	note
growth rate of carp and crucian	G^C	$G_h^C \left\{ 1 + p \left(1 - \frac{C^C}{C_{max}^C} \right) \right\} + R^C$	Kitchell
net growth rate: G_h^C (1/d), correction coefficient for population distribution: $p^C=0.1$, $C^C=CA/Ar$, Ar : area of sc, $C_{max}^C=3.6$ gWW/m ²			
respiration rate	R^C	arbitrary (1/d)	
harvest	FC^C	$fc^C \cdot CA$ (tWW/d)	
fishing mortality: fc^C (1/d)			

(g) 栄 養 塩

term	symbol	equation	note
excretion rate of animals	EX	$\left\{ \frac{(1-FA)}{FA} \cdot G + R \right\} \cdot f \cdot FI + EX_{adj}$, $4G \cdot f \cdot CA$ (t/d) (carp and crucian)	
assimilation coefficient: FA , growth rate: G , respiration rate: R , nutrient/body wt. ratio: f animal's biomass: FI (t), EX_{adj} : adjusting term in order to make constant f			
mineralization flux	REM	$REM^1 \cdot G_h^{T20}$, $REM_P^1=0.03$, $REM_N^1=0.024$, $\theta_M=1.072$ (t/d)	
nutrient elution	DIF	$dif \cdot Ar$ (t/d)	
elution rate: dif (mg/m ² ·d), area of sc: Ar			
sedimentation rate	W^0	$f_{wr} \cdot W_2^P$, $C_{wr}^P=1.0$, $C_{wr}^N=0.9$, W_2^P : sedimentation rate of other algae (1/d)	
grazing rate by zooplankton on detritus	GZ^0	$\frac{G^Z (C^0 - C_{tr}^0) Z}{FA^Z (C^P - C_{tr}^P) + PR^Z (C^P - C_{tr}^P) + (C^0 - C_{tr}^0)} \cdot f^0$ (t/d)	
external load	$LOAD$		(t/d)

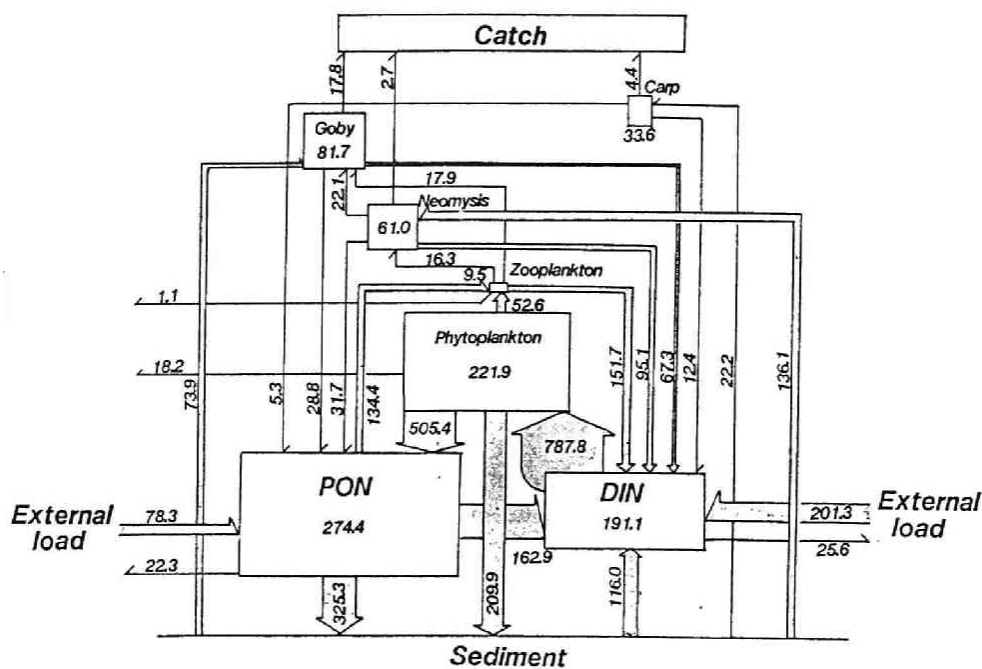
2.5 計算結果の検討

本モデルは湖中にて生起している水質変化機構を比較的詳細にモデル化してはいるものの、情報、観測値等の不足から湖内栄養塩循環にて重要な役割を持つと推定されている幾つかの要素を無視せざるを得なかった。表 2.5.1 にこれらの点を含め霞ヶ浦栄養塩循環の特徴とそれらに対するモデルの対応を示す。このように本モデルは多くの改良すべき点を持つが、本節ではこれらの点をひとまずおき、モデル計算から推定される富栄養化機構について若干言及する。

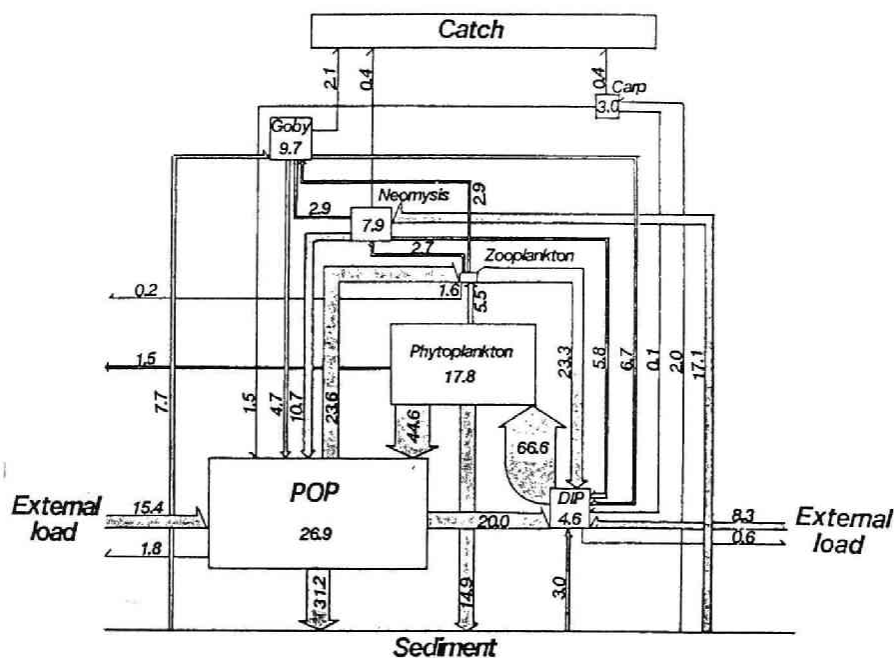
表 2.5.1. 霞ヶ浦栄養塩循環の特徴とモデルの対応

コンパートメント	現 象	モデルの対応・再現性
植物プランクトン	夏期にラン藻の急激な卓越 夏期窒素制限の可能性 外部栄養塩と成長速度のヒステリシス	ラン藻とその他藻類を別途モデル化 計算結果も同様な傾向 内部栄養塩動力学モデル化
動物プランクトン	冬期被食による減少 イサザアミとの強い被食捕食関係	計算結果も同様な傾向 計算結果、感度解析も同様な傾向
イサザアミ類	夏期の減少 高い生産量（漁獲量）	ハゼによる捕食により再現 計算結果も同様な傾向
底 質	イサザアミ・魚類による栄養塩回帰 夏期藻類急増期の DIP の急速な回帰 物理的な攪乱による回帰の可能性	計算結果も同様な傾向 再現せず、DO 動力学モデル化の必要あるか。 オーダー評価により無視
そ の 他	夏期の DIN の減少、秋期による増大 ユスリカ幼虫などのベントスの物理循環への影響 バクテリアの動力学の物質循環への影響 湖岸帯水草の物質循環への影響	計算結果も同様な傾向 モデル化せず モデル化せず（一次反応型無機速度） モデル化せず

まず、図 2.5.1 は検定期間中の各コンパートメント間での栄養塩移動量を描いたものである。湖外からの流入・流出分に比べ、湖内（底泥を含む）での循環量がかなり大きい。湖内をさらに湖水、底泥と分離し、湖水への栄養塩流入をその要因別に検討してみると図 2.5.2 のようになる。すなわち、流入源としては外部負荷の他に持ち上げ（biological pump）、溶出（elution）による湖底起源分も大きな比重を占める。一方、流出としては大半が沈降により湖底に留まり、河川からの流出、漁獲による流出分はわずかである。湖内藻類成長の制限因子としては夏期の窒素が第一にあげられるが、春先の水温も重要であ



(a) 窒 素



(b) リ ン

図 2.5.1 栄養塩循環図

数字は湖水中現存量(t), 及び移動量(t/月)を示す。

1978 年～1980 年の平均。

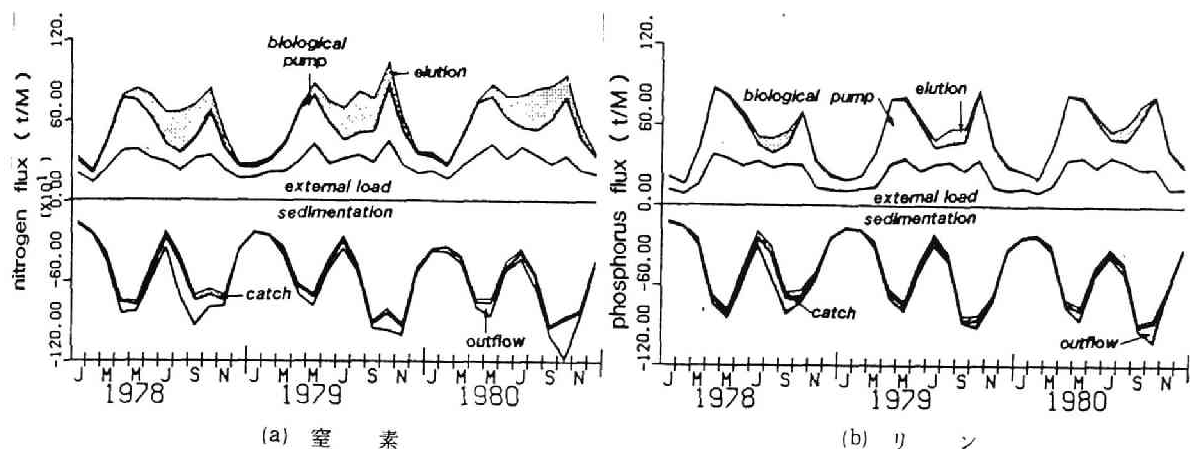


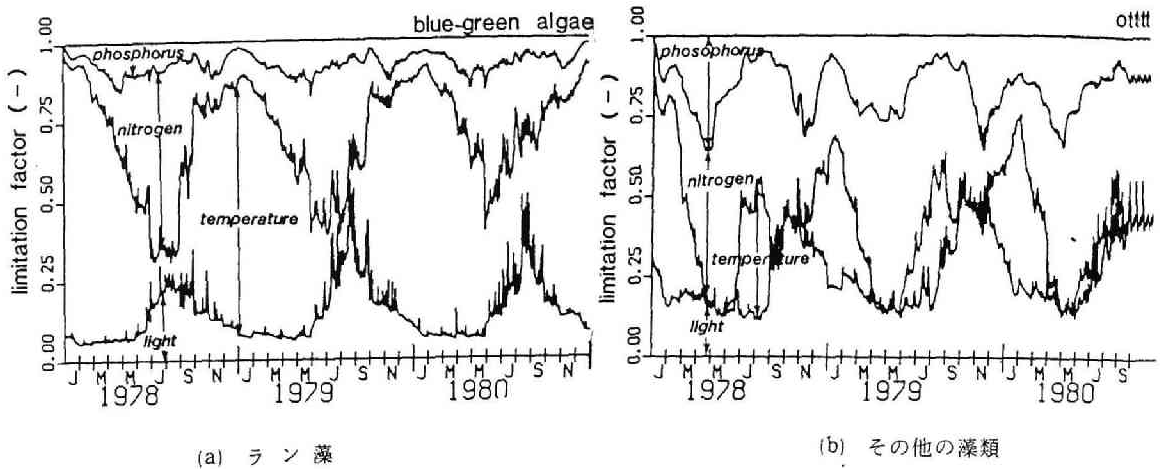
図 2.5.2 栄養塩の収支

る(図 2.5.3)。湖をめぐる外部環境の変化に対する湖水質及び富栄養化構造の変化を表 2.5.2, 図 2.5.4 に示す。表 2.5.2 №1～4 はいずれも茨城県が現在計画・施行している外部負荷削減計画に基づいたものである。また №6, 7 は漁業管理, 底泥除去に対応するものと考えることができる。このような外部因子の変化を行った時の湖内窒素循環構造は図 2.5.4 に示されている。(a), (b) いずれの図においても擾乱を受けた栄養塩循環箇所から離れるにつれて影響度は小さくなっている。またイサザアミ, ハゼ・エビ, あるいは動物プランクトンは捕食・被食の関係を通じて擾乱に対する系全体の安定度を大きくするが如く応答しており霞ヶ浦富栄養化のホメオスタティックな特性をうかがうことができよう。

表 2.5.2 湖水質の応答

No	計 画	1990年度予測水質			備 考
		TP(mg/ℓ)	TN(mg/ℓ)	Chl-a(μg/ℓ)	
1.	外部負荷削減対策なし	0.110	1.32	69.4	外部負荷 TN : 16 %, TP : 15 %増 *1
2.	削減対策施行	0.067	1.01	55.9	TN : 18 %, TP : 37 %削減 *1
3.	"	0.068	1.08	57.0	No2にて水文気象型を1978年と同一にする
4.	"	0.066	0.99	53.8	No2にて水文気象型を1980年と同一にする
5.	強化削減対策	0.049	0.59	40.1	TN : 82 %, TP : 64 %削減 *1
6.	No2+イサザアミ捕獲強化	0.052	0.87	48.0	漁獲率 : 0.005 / d
7.	No2+底泥溶出削減	0.065	0.90	51.9	削減率 : 50 %

*1 : 対 1981 年度比。水文気象型は断りのない限り 1978～1980 年の平均型とする。



本モデルでは藻類成長速度を

$$\hat{P}_{\max}^{\text{II}} \cdot g(T) \cdot g(f_P) \cdot g(f_N) \cdot g_{T_f}(I)$$

と仮定している。但し、 $g(T)$ 、 $g(f_P)$ 、 $g(f_N)$ 、 $g_{T_f}(I)$ とはそれぞれ水温、窒素内部塩濃度、リン内部塩濃度、光強度によって最大成長速度 $\hat{P}_{\max}^{\text{II}}$ が割引かれる率を示すものである。これらの要因の制限強度を表現するために、例えば水温では

$$L(T) = \frac{\ln g(T)}{\ln(g(T)) + \ln(g(f_P)) + \ln(g(f_N)) + \ln(g_{T_f}(I))}$$

としておけば

$$L(T) + L(f_P) + L(f_N) + L(I) = 1$$

$$0 \leq L(T), L(f_P), L(f_N), L(I) \leq 1$$

が成立し、さらに L の大きさは制限の強さの順番と一致する。上図はこれを積み上げて記したものである。計算にあたってはラン藻では期間中の最高水温、その他の藻類では 20°C における $f_P = f_{P\max}$ 、 $f_N = f_{N\max}$ 、 $I = I_{\max}$ における計算総成長率を $\hat{P}_{\max}^{\text{II}}$ とし、 g はこの値によって正規化したものを使用した。

図 2.5.3 藻類成長の制限要因

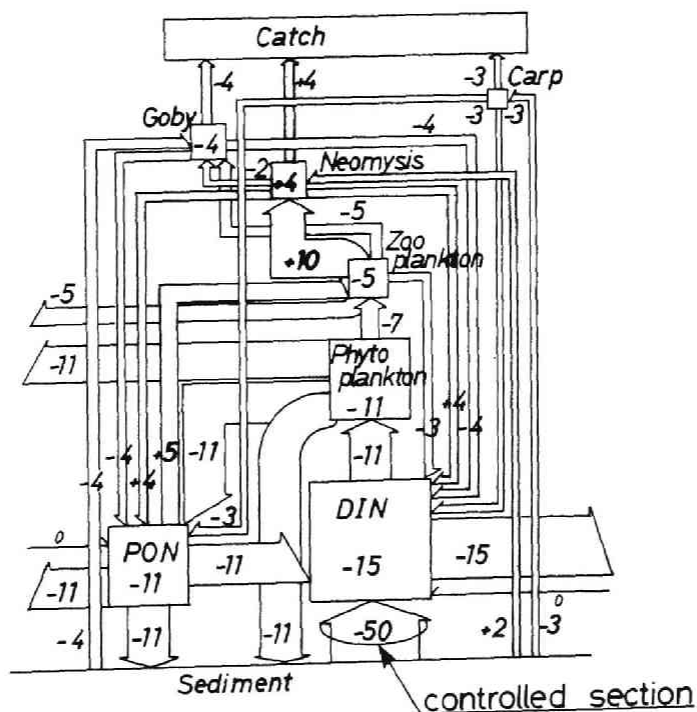
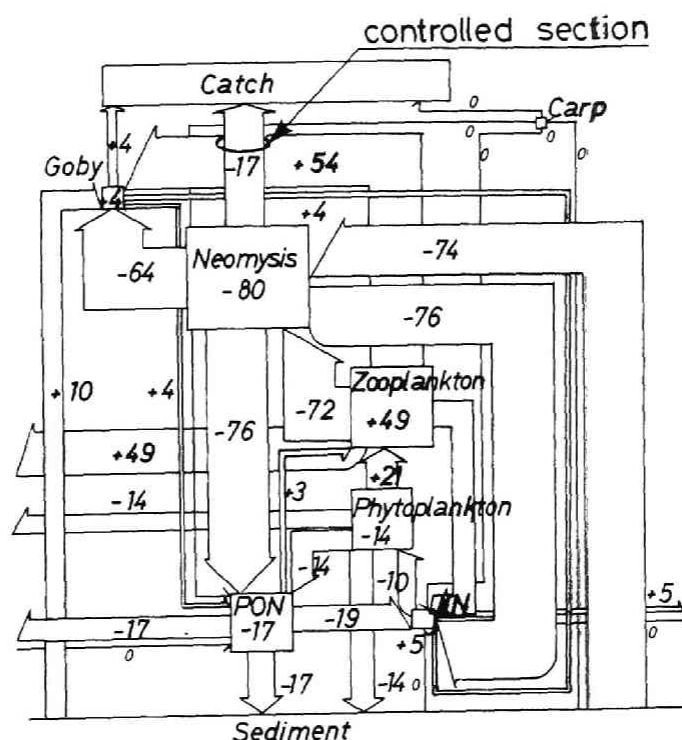


図 2.5.4 栄養塩循環構造の変化

表 2.5.2 Na 2 の 1990 年度計算値と比較し、増減の割合 (%) を示したものの。トーン部は増加を示す。

以上，本モデルにより水質管理上示唆される点を幾つか上げた。これらに対する細かい検討及び他の例については 別途 記しているが¹⁾ これらの諸点を合わせ本モデルあるいは同様のモデルにより霞ヶ浦のみならず，他湖沼富栄養化現象機構解析にも資することが期待されよう。

引用文献

- 1) 松岡譲(1984):霞ヶ浦富栄養化モデル。国立公害研究所研究報告, 第54号。
- 2) 井上頼輝(1975):水質汚濁の機構と富栄養化のモデルについて。第9回水質汚濁研究に関するシンポジウム講演集, 日本水質汚濁研究会, 37-62。
- 3) DiToro, D. M., O' Connor, D. J., Thomann, R. V., and Mancini, J. L. (1975): Phytoplankton-zooplankton-nutrient interaction model for Western Lake Erie. Systems analysis and simulation in ecology, Vol III, Patten, B. C. ed, Academic, New York, 423-474。
- 4) 環境庁水質保全局(1977):昭和51年度水質変化予測基本調査報告書。
- 5) 土木学会(1978):琵琶湖の将来水質に関する調査。
- 6) 宗宮功(1981):湖沼の物質循環モデル。国立公害研究所調査報告, 第18号, 114-151。
- 7) 合田健(1984):陸水域の富栄養化防止に関する総合研究(VIII)-総括報告一, 国立公害研究所研究報告, 第57号。
- 8) 村岡浩爾・福島武彦(1981):霞ヶ浦(西浦)の湖流。国立公害研究所研究報告, 第19号。
- 9) 村岡浩爾・福島武彦(1983):ボックスモデルを用いた水質予測方式に関する研究。土木学会論文報告集, 336, 85-94。
- 10) 津野洋(1977):微生物における基質の摂取・代謝の動力学モデル化に関する研究。京都大学学位論文。
- 11) 宮崎忠国・中杉修身(1981):霞ヶ浦環境動態モデル。国立公害研究所調査報告, 第18号, 83-91。
- 12) 北畠能房(1981):湖環境の利用に関するモデリング。国立公害研究所調査報告, 第18号, 157-172。
- 13) 国土開発技術研究センター(1978):昭和52年度霞ヶ浦汚濁制御調査報告書。建設省関東地方建設局霞ヶ浦工事事務所委託。
- 14) 例えば須藤隆一編(1981):*Microcystis*(藍藻類)の増殖特性。国立公害研究所研究報告, 第25号など, 文献1)に実験報告の一括整理がなされ

ている。

- 15) 岩能敏夫・安野正之(1981):霞ヶ浦の一次生産特性, 国立公害研究所研究報告, 第22号, 99-122.
- 16) 福島武彦ら(1982):湖沼の沈降物質に関する研究, 第18回衛生工学研究討論会講演論文集, 土木学会衛生工学委員会, 9-14.
- 17) 花里孝幸(1983):私信.
- 18) Leidy, G. P., and Ploskey, G. R. (1980): Simulation modeling of zooplankton and benthos in reservoirs. Technical Report E-80-4, USDI Fish and Wildlife Service.
- 19) 村野正昭(1963):イサザアミ, *Neomysis intermedia Czerniawsky* の漁業生物学的研究, IV, 生活史特に成長について, 水産増殖 12(2), 109-117.
- 20) Kitchell, J. F. et al. (1974): Model of fish biomass dynamics. Trans. Am. Fish. Soc., 103, 786-798.
- 21) 例えば文献 13)
- 22) 細見正明(1983):私信
- 23) 花里孝幸・岩熊敏夫・安野正之(1983):生物にかかわる物質移動Ⅱ, 動物プランクトン・ベントス, 特別研究「陸水域の富栄養化防止に関する総合研究」研究内容検討会資料, 国立公害研究所水特研グループ, 33-40.
- 24) Malanchuk, J., Otis, J., and Bouver, H. (1980): Efficient algorithms of ordinary differential equations for ecosystem modeling. EPA-600/3-80-037, U.S. Environmental Protection Agency.
- 25) 春日清一(1983):霞ヶ浦モデル打合わせ会提出資料, 国立公害研究所水特研グループ.
- 26) 戸田任重・高橋正征・市村俊英(1982):霞ヶ浦におけるイサザアミ (*Neomysis intermedia*) の鉛直・水平分布と生物量の季節変化, 国立公害研究所調査報告, 第22号, 148-156.

結 論

本論文は水質変化過程の数理モデル化とその応用に伴う幾つかの問題に対する検討を行ったものであり、その主たる成果について要約すると次のようになる。

まず第Ⅰ編では水質変化モデル開発に係る基礎的な問題を論じた。

第1章では溶解性物質を対象としその一次元解析に関する問題を取り上げている。ここではまず従来から発達してきた移流分散理論をラグランジュ的な立場から再検討し理論的・実験的な解釈を試みた。次いで反応性物質の移流分散論を展開し、一次反応性物質においてさえ従来の移流分散論の成果が適用できないことを示した。検討は定常投入、2次元クェット流場を中心に展開されたが、他の条件下においても同様の考え方が可能であり、その実用的な意義は高いものと考えられる。次いで、乱流混合に伴う濃度変動に関し線源ブリュームを中心に理論的、実験的検討を行った。

第2章では浮遊性物質の基礎方程式をめぐるいくつかの問題点について検討を加えた後、粒子状物質がもつ沈降・圧密作用、凝集・破壊作用に焦点をあてそれらの現象を記述する数理モデルの開発を行った。浮遊性物質では粒子スケールと解析スケールが1に近づくことが多く水質の連続体としての取り扱いに十分な注意が必要となる。第2.1節ではそれらの点を中心に水質測定値のゆらぎと粒度分布の関係、水質連続式・運動量式導出に関する問題的などの検討を行った。次いで第2.2節では沈降・圧密現象の基礎式としての水質濃度に関する移流拡散型方程式を導き、その特性、数値解析上の問題点、及び室内実験との適合性について論じている。本方程式は従来この種の基礎式とされていた Kynch 式を比較的自然的に圧密領域まで拡張したものであり、沈降・圧密現象の統一的な取り扱いにあたってその意義は高いものである。第2.3節では凝集・破壊現象の数理モデル開発を行っている。粒子物質の衝突合一、破壊分離は溶解性物質には見られない現象であり浮遊性物質の挙動を定める重要な要素の一つである。本節ではGDE(一般化動力学方程式)を基礎に粒子の合一・分離を記述するモデルを導出し、各項の理論的・実験的な検証を行うと共にモデル全体としての適合性を検討した。さらにこの種のモデルにおいて大きな問題点

であった対象粒度幅の制限を部分分割法の導入によって大幅に緩和した。これらの検討及び改良によって浮遊性物質の凝集・破壊過程の数値モデルによる追跡がほぼ可能になったと言ってよい。

第Ⅱ編では水質変化モデルの応用的側面から見た幾つかの検討を行った。

まず第1章では変化過程のうち移流拡散現象の効果が強い場合を取り扱っている。現在のところ、移流拡散モデルは他の水質変化のモデルに比べ、信頼度が高いと考えられており実際場への応用例も極めて多い。こうした背景の中で、第1.1、1.2節はモデル自体の開発ではなく、その応用局面の拡大を試みたものである。その第一の局面は2次元水域での水質濃度分布内挿に係るものである。従来の内挿法は物理的根拠が不明確であり水質濃度観測値以外の情報を内挿作業に生かすことは不可能であったが、第1.1節で提案された移流拡散型内挿法（CD法）によればこれらの問題点は一挙に解決する。また第1.1節ではこの新内挿法の実際場に対する適用性の検討もなされている。第二の局面は下流での水質濃度変動から上流での汚濁負荷排出特性を推定する試みである。投入負荷を入力、下流での監視水質濃度を出力とするシステムを考えると問題は出力を観測して入力特性を推定する逆推定問題と考えることができる。この場合、システム方程式は移流拡散モデルであり、問題の定式化法、モデル特性、計算方法などが解に影響を及ぼす。第1.2節では室内実験例、実際場での例を上げてこれらの点に検討を加えた。

次に第1.3節では移流拡散モデルの実際場に対する典型的な例として、びわ湖南湖に対するモデル適用を行った。使用した数値計算手法は有限要素法であり、これを用い2次元一層の連続式、運動方程式及び移流拡散方程式が解かれている。移流拡散の他に浮遊物質に関する極めて簡単な沈降巻き上げモデルも提案されており、これらを使用した場合の計算値、それに対応する実測値の対比がなされている。

第2章では移流拡散以外に生物反応などの影響も強い湖富栄養化現象を取り上げ、その数値モデル化を試みている。対象となったコンパートメントは、水中栄養塩、動植物プランクトン、魚類などであり、これらの関連性を室内実験、野外観測、及び文献などの情報によりモデル化した。対象湖は茨城県霞ヶ浦西浦である。モデルの空間分割数は4であり、第1章に示した移流拡散モデルの立場からは極めて不十分なものであるが、その誤差は10%（第2.1節）程度で

あり他のモデル誤差に比べ比較的小さい。この富栄養化モデルにより再現された現状湖水質変動は観測値とほぼ一致した。元来、この種のモデルは栄養段階説に基づき捕食連鎖を中心とするが、この考え方では霞ヶ浦のような浅い富栄養湖の現象を説明することは不可能である。本章で示したモデルでは捕食連鎖と共に腐生連鎖の道筋にも強い焦点が置かれており、従来から極めて困難とされてきた浅湖富栄養現象のモデル化に成功している。

以上、本論文では水質変化過程の数理モデルに関し、基礎から応用にわたる様々な問題に対する検討を行った。検討にあたっての基本的な視点は緒論にて既に述べているように全体論（Holism）的な立場に立ったものであり、その中にて各構成要素間の構造を原型となるべく同一にしかつ全体としてより簡単でより明晰化すべく努めたものである。

既に述べたように、水域中での水質変化過程は素となる種々の現象が交錯し複雑な機構をなしている。その程度は複合化することによって全く新たな性質をもつ程には強くなく、また大数法則で押し切れる程、統計的に練れたものでもない。さらにこうした現象をどうにかモデル化しても、その評価基準は千差万別である。

上記の点は水質変化過程のみならず環境系のモデル化にあたり本質的な問題である。その解答は問題の多様性から考えて一般的には論じ得ず、一つ一つ解決していかなければならない*。本論文が目ざした点もまさにここにあり、いくつかの答を示し得たものとする。

(*) なお、手法上、特に平均化操作の観点から上記主旨を論じたものを付節に記し、論旨の明確化を図っている。

最後に本研究の遂行にあたり終始懇切な御指導をいただいた京都大学工学部住友恒教授に深甚なる謝意を表します。また京都大学工学部岩井重久教授（現京都大学名誉教授），同末石富太郎教授（現大阪大学工学部教授），国立公害研究所水質土壌部合田健部長，同総合解析部内藤正明部長，中杉修身主任研究官及びミシガン大学工学部 R. P. Canale 教授には研究遂行にあたり多くの御指導と便宜を賜わった。

また京都大学工学部衛生工学科水道工学講座の方々，特に松本忠生助手，早瀬隆司氏，戸田泰和氏，村田康弘氏，清水嘉彦氏，田中誠氏には多大の助力を戴いた。ここに記して感謝の意を表する。

付節 水質変化過程の数理モデルにおける平均化操作の意義

本論文各章にて開発したモデル及びその導出にて使用した各手法は対象に
じ、それぞれ異った特徴をもつ。しかし、いずれも複雑な機構をもった水質変
化過程を単純な数理モデルによって表現しようとしたものであるから、それ故
に生ずる方法論上の共通性が存在する。これらのうち、本節では平均化操作
(averaging, aggregation) に関し、論文文中に取り上げられた問題を中
心に、これをモデル・ビルディングの中に顕わに導入した理由、及びその得失
について述べる。

平均化操作は本論文随所に出現する。第Ⅰ編第 1.1, 1.2 節では水路断面内
での空間的平均及び時間的平均化操作を、また第 2.1 節では空間的局所平均化
操作を主題とした。第Ⅱ編では文脈にまで係わることはなかったが、第 2 章富
栄養化モデルにて各種にわたる生物種を集中しコンパートメント化する操作、
あるいは空間的・時間的に変動する現象をモデルが対象とするスケール（空間
的には全湖 4 ボックス、時間的には月～年スケール）までに平滑化する操作の
必要があった。

これらの操作はいずれも恣意的に取り上げられたものではなく、下に掲げる
ような対象水質変化過程に対する認識、及びそれをどのように確定・明示化し
かつ取り扱い易い形にまとめるかと言ったモデルの目的性に応じて取り入れら
れたものである。

(1) 対象現象は種々の素過程の結合系であった。素過程には均一状態空間での
考察をもとに比較的疑問の余地が少ないもの、実験操作上、明確に把握で
きその再現性が高いもの、あるいはさらにその素過程にまで溯る必要があ
るもの、などがあったが、いずれにせよ、対象現象にとって、素過程、及
びそれらの相互関係は現象特性を定める大きな要素であった。

(2) 通常、素過程はさらにその素過程から成り立ち、対象とする現象と言えど
も、より大規模な現象の一素過程にすぎない。この過程の階梯でのレベル
の違いは時間的、空間的スケールなどの相違を伴うのが普通であり、逆に
スケールを定めれば、対象とすべき現象を同定できる場合も多いと考えら
れる。

(3)一方、モデル・ビルディングからは、漫然と水質変化現象を模写すると言う立場はあり得ず、何らかの作成目的が存在しその目的が定める時空間スケールでの対象現象の再現性が要求されている。しかし、この時空間スケールでの現象は(1)、(2)で述べたように他スケールの現象の結合体でもある。したがって、これをシミュレートするためには、この階梯状に連なった素過程をなるべく広く取り込み“現実性 (reality)”に富んだ複雑なモデルの作成が望まれる。

(4)しかし、モデル複雑化は弊害も大きい。まず開発に労力がかかり、情報・データ面での強力な支持を受ける必要がある。第2にモデル内容、その意味に対する見通しを悪くする。元来、数理モデルの目的とは現象を構成する諸要素を抽出し、各要素を一定のルールのもとで結合させることによって個々の素過程に対する経験を質的に高め、かつ、対象現象に関する推論のプロセスに“論理の明晰化と客観化”を付与する点にあると考えることができる。したがって、説明すべき現象にとって本質的でない部分はできるだけ捨象し、モデル内容を明解にしておいた方が都合よい。

以上、(1)~(4)をまとめると、構成すべき数理モデルとは問題とする時空間スケールを中心に、できるかぎり素過程のメカニズムを含み、現実性に富むが、一方では、できるかぎり簡明であることが要請されている。この要請は互いに背反しており、モデル・ビルディングにあたっては、この緩和が重要な問題となる。本論文での平均化操作の意義もこの点に認められるべきであり、この操作を顕わに導入することによって以下の利点を期待したものである。

(1)素過程モデルから対象モデルへの結合に演えき性をもたせ、複雑さをそれほど増さずに“現実性”の付与に資する。また、従来、直観的に作成されていた対象現象に対するモデルと素過程との関連を明らかにし、モデル・パラメータなどに対する理解・認識を深める。

(2)平均化操作を off-line 的に行い、パラメトライズしておくことによって小スケールを対象とする計算負担から逃れる。またパラメトライズした関係、及びそのパラメータ自体を観測することによってモデル精度の向上に資することもできる。

上の2点は多かれ少なかれの平均化操作においても出現するが、対象によって強弱があり、例えば、第I編第2.1節の浮遊性物質空間的局所平均化操作

などは(1)後半の観点が強い。(2)に関しては本論文にて大きく取り扱ってはいないが、第Ⅱ編第2.1節でのボックス間交換流量算出、第2.3節植物プランクトン成長速度の日平均操作などにその例を見ることができる。

一般に素過程モデル、あるいは精細モデルに平均化を行う際には、無条件下では行い得ず、何らかの前提条件が付帯されるのが普通である。また、平均化によって、素過程モデルが同型であってもパラメータ値あるいはその物理的意義が大幅に変化することもある。第Ⅰ編第1.2節はその例であった。以下にて、本文文脈の都合上触れ得なかったが、平均化操作を論ずる上で参考となる幾つかの問題を取り上げ、平均化操作の諸様相を論じてみよう。

(1) ボックスモデル¹⁾

第Ⅱ編第2章では霞ヶ浦を4つに分割しボックスモデルの適用を行っている。ボックスモデルとは水質の空間的分布を記述するモデルとしてはもっとも荒っぽいものの一つであり、その妥当性、近似度などの心配が付きまとう。今、これを移流拡散モデルの空間的平均化として解釈しボックスモデルのモデル特性を検討してみる。論旨を簡明にするため一次元一様流を考える。素モデルは式(1)である。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + R \quad (1)$$

ここに c : 濃度, u : 流速, D : 拡散係数, R : 反応速度, t : 時間座標, x : 位置座標を示す。ボックス p を区間 $[x_w, x_e]$ とし、式(1)を区間内で平均化すると次式になる(図1)。

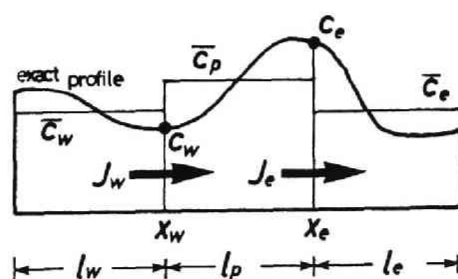


図1 記号説明図

$$l_p \frac{d\bar{c}_p}{dt} = J_w - J_e + R \quad (2)$$

ここに

$$l_p = x_e - x_w, \quad \bar{c}_p = \frac{1}{l_p} \int_{x_w}^{x_e} c(x, t) dx \quad (3)$$

$$J = uc - D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad J_w = J|_{x=x_w}, \quad J_e = J|_{x=x_e} \quad (4)$$

$$R = \frac{1}{l_p} \int_{x_w}^{x_e} R dx \quad (5)$$

式(2)は J に境界面濃度及びその勾配を含み、これらが不明なかぎり独立したモデルとしての用をなさない。いわゆるボックスモデルでは J の主成分を上流側ボックス濃度が流速 u で流下してくるものであると考え、

$$J_w \cong J_w^B = \bar{c}_w u, \quad J_e \cong J_e^B = \bar{c}_e u \quad (6)$$

で近似する。この近似はいくつかの問題を引き起す。ボックス平均濃度と境界濃度の相違は J に大きな誤差をもたらすが、拡散混合の効果はどうか。例えば最初の問題に関し流下に伴い濃度が低下している場合($\partial c / \partial x < 0$)を考えよう。この時、断面 $x = x_w$ での濃度 c_w は上流側ボックス平均濃度 \bar{c}_w より小さい。したがって拡散混合が無視できる時には式(6)で算出されるフラックス J_w^B は式(4)で算出される J_w に比べ大きい。その程度は c の $x = x_w$ 付近でのテイラー展開から

$$J_w^B - J_w = - \frac{l_w u}{2} \frac{\partial c}{\partial x} \bigg|_{x=x_w} + \frac{l_w^2 u}{6} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \bigg|_{x=x_w} \quad (7)$$

となり右辺第2項以下が無視できる時には J_w^B は J_w にて拡散係数 D が $l_w u / 2$ 程度になった場合に対応する(ボックスモデルと移流拡散モデルの対応に関するこの種の検討は古くから何回も行われている²⁾)。式(6)は J を表現する簡単な方法であるが、若干複雑なものとして

$$J_w \cong J_w^S = A \bar{c}_w + B \bar{c}_p \quad (8)$$

なるものを考えることもできる。定数 A, B は様々な根拠に基づいて定めることができる。1つの方法として、ボックススケールの濃度変化時定数は全体的な現象の時間スケールに比べはるかに小さく反応・負荷もボックススケールの現象を取り扱う上で無視し得ると仮定できる時には次式を根拠に考えることができる。

$$u \frac{dc}{dx} = D \frac{d^2 c}{dx^2} \quad (9)$$

式(9)の解は次のようになる。

$$c = \left\{ -\Delta (1 - e^{P_p}) - \Delta P_p e^{\frac{ux}{D}} \right\} \bar{c}_w + \left\{ 1 - \Delta (e^{P_p} - 1) + \Delta P_p e^{\frac{ux}{D}} \right\} \bar{c}_p \quad (10)$$

但し Δ, r_{pw}, P_p , 及び P_w は表1に示す。したがって $l = 0.5(l_p + l_w)$ とすると、 A, B は

表1 ボックスモデル

α, β は式(12)により定義する。

No	model	α	β	note
I	ideally mixed tanks in series	1	0	Ham et al.(1918) ⁽⁴⁾ Harleman et al.(1982) ⁽⁵⁾
II	ideally mixed tanks with backmixing	1	1	Phelps-Velz(1933) ⁽⁶⁾ Miyauchi(1960) ⁽⁷⁾ Muraoka et al.(1983) ⁽⁸⁾
III	finite section model	0-1	1	Thomann(1972) ⁽⁹⁾ USA/USSR joint project(1979) ⁽¹⁰⁾
IV	hybrid model	α_h	1	Spalding(1972) ⁽¹¹⁾
V	exact model	α_e	β_e	

$$\alpha_h = \max(0.5, 1 - P_w^{-1}), \quad \alpha_e = \Delta(e^{P_p} - P_p - 1), \quad \beta_e = P_p P_w \Delta \cdot (1 + \gamma_{pw}) / 2$$

$$\Delta = (\gamma_{pw} e^{P_p} - 1 - \gamma_{pw})^{-1}, \quad \gamma_{pw} = l_p / l_w, \quad P_p = u l_p / D, \quad P_w = u l_w / D, \quad \beta_w = P_p + P_w / 2$$

$$A = \Delta (e^{P_p} - P_p - 1) u + D P_p P_w \Delta (1 + r_{pw}) / 2l \quad (11)$$

$$B = \{ 1 - \Delta (e^{P_p} - P_p - 1) \} u - D P_p P_w \Delta (1 + r_{pw}) / 2l$$

となる。あるいは式(4)の型式にならって

$$J_w = u \{ \alpha \bar{c}_w + (1 - \alpha) \bar{c}_p \} - \frac{\beta D}{l} (\bar{c}_p - \bar{c}_w) \quad (12)$$

但し $\alpha = \Delta (e^{P_p} - P_p - 1)$, $\beta = P_p P_w \Delta (1 + r_{pw}) / 2$ と記すこともできる。式(12)から α , $(1 - \alpha)$ とは境界濃度 c_w を上流, 下流ボックス濃度から推定する際の重み, β とは $\partial c / \partial x$ を $(\bar{c}_p - \bar{c}_w) / l$ で近似した時の補正係数と解することが可能である。図2は $l_p = l_w = l$ とした時の α , β の算定値を示したものであり, 従来から提案されてきた種々の α , β 値に関し1つの判断基準を与えてくれる。

反応 R に関し, その空間的な変動が濃度 c の変動のみに依存すると仮定できる時には c を \bar{c}_p 及び変動成分 c' に分解し

$$R(c) = R(\bar{c}_p) + \left. \frac{dR}{dc} \right|_{c=\bar{c}_p} c' + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R}{dc^2} \right|_{c=\bar{c}_p} c'^2 + \quad (13)$$

との展開から

$$\overline{R(c)} = R(\bar{c}_p) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R}{dc^2} \right|_{c=\bar{c}_p} \bar{c}^{\cdot 2} + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 R}{dc^3} \right|_{c=\bar{c}_p} \bar{c}^{\cdot 3} + \dots \quad (14)$$

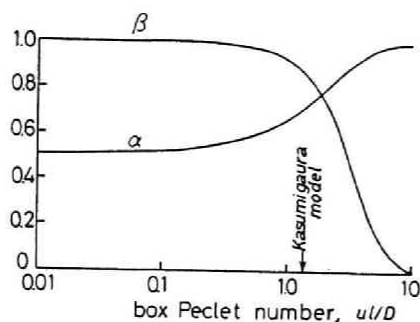


図2 α , β の変化図

とすることができる。式(14)右辺中第3項以下が無視でき, かつ $\overline{R(c)}$ を

$R(\bar{c}_p)$ で近似する場合には第2項が平均化誤差となる。この項は反応次数の大小によって正負いずれにもなる。化学工学の分野で知られるミクロ混合が反応速度に及ぼす影響³⁾も、式(14)を混合と反応の係わりとの視点から捉えたものと解釈してよいであろう。

ボックスモデルに対する以上のような類いの議論はモデル・ビルディングにどのような利点をもたらしたか。ボックスモデルとは移流拡散モデルの近似であり、移流拡散モデルこそが実際現象を表現するに相応しいものであるとの立場に立てば、論旨は明瞭となるが、形状が簡単であるなど特別な場合を除いてはこれを期待することはできない。したがってこうしたモデル間対応の結果得られるものとしては、現在、錯綜的に提案されている種々の混合モデルに対する空間的平均化という視点に立ったモデルメカニズム、モデルパラメータに対する背景説明であり、その範囲内にて、各モデルの取捨選択、結果の比較を行う際の“思考の節約”に役立つものと考えられる。

(2) 移流分散モデル

平均化により素過程モデル（あるいは同一現象を細密な時空間スケールで表すモデル）をアグリゲートして対象時空間スケールでのモデルを導出する作業は、通常、幾つかの仮定に基づいており、導出型にもそれなりの根拠が存在するが、応々にしてこれらは忘れ去られ仮定を越えた使用がなされる場合が多い。また、そうした使用によって元来、概念上別個のものが、平均化モデル上の各項にて交錯を起こしている場合もある。第I編第1.2節はその例であった。第I編式(1.1.7)は式(1.1.6)を断面平均化したものであったが、断面平均値からの偏差濃度 c' の支配式は式(1.1.6)から式(1.1.7)を差し引き導くことができる。簡単のために x, z 面内の2次元現象を想定し $D_x = 0, D_z$: 一定を仮定すれば、

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial c'}{\partial t} & + \bar{u} \frac{\partial c'}{\partial x} & + u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} & + u' \frac{\partial c'}{\partial x} & - \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} & = D \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} & - q \bigg|_{z=0}^{z=h} & + R' \quad (15) \\ \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & \text{(IV)} & \text{(V)} & \text{(VI)} & \text{(VII)} & \text{(VIII)} \end{array}$$

となる。ここに $q \bigg|_{z=0}^{z=h}$ とは $z = h$ 及び $z = 0$ からの流出入である。移流分散

理論で通常設定される仮定¹²⁾では、(1) c' は \bar{c} に比べかなり小さい、(2) \bar{c} の変化時空間スケールに比べ c' のそれはかなり小さい、(3) 反応及び境界からの流出入はない、とする。仮定(1)により (Ⅳ)、(Ⅴ) 項が、仮定(3)により (Ⅶ)、(Ⅷ) 項が無視される。また解析時空間スケールを c のそれに合わせれば、仮定(2)により、(Ⅰ)、(Ⅱ) 項も無視でき、結局

$$u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (16)$$

からレイノルズ・フラックス $\overline{u'c'}$ を求めることができる。しかし、一般水系にて遭遇する問題では上記の仮定がすべて満足されることは少ない。第1.2節は仮定(3)の一部 $R=0$ を緩和したものであった。この場合、式(16)に対応する式は、

$$u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} - k_2 c' \quad (17)$$

であり c' の発生機構は式(16)と若干異なる。同じ仮定(3)の緩和であっても、例えば開水路中の溶存酸素のように $q \Big|_{z=0}^{z=h} = k_2(c_s - c|_{z=h})$ ならばどうか (k_2 : 再曝気係数, c_s : 飽和濃度)。

式(16)に対応する式は、

$$u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} - k_2(c_s - c|_{z=h}) \quad (18)$$

となる。仮定(1)から $c|_{z=h} \cong \bar{c}$ とすれば c' の原因力には $\partial \bar{c} / \partial x$ の他に $c_s - \bar{c}$ も存在している。すなわち、式(18)を解き

$$c'(z) = \frac{k_2 z^2}{2D} (c_s - \bar{c}) + \frac{1}{D} \int_0^z \int_0^z u' dz' dz \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + c'(0) \quad (19)$$

となるからレイノルズ・フラックス $\overline{u'c'}$ は

$$\overline{u'c'} = \left[-\frac{k_2}{2Dh} \int_0^h z^2 u' dz \right] \bar{c} + \left[\frac{1}{Dh} \int_0^h u' dz \int_0^z \int_0^z u' dz' dz \right] \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (20)$$

となり $\partial \bar{c} / \partial x$ のみならず \bar{c} にも係わる。言い換えるならば $\overline{u'c'}$ には拡散表示成分の他に移流表示成分が存在する。再曝気現象ではこの成分の大きさは極めて小さく無視し得る場合も多いであろうが、重要な点は $\overline{u'c'}$ の処理方法は、必ずしも拡散係数表示で万全であるのではなく平均化の前提条件によって様々に変化する事を認識することにある。平均化モデルを使用する際に充分注意しなければならないことである。

(3) 非線型現象の平均化¹³⁾

モデル・ビルディングに平均化操作を導入する利点の一つに“論理の明晰化と客観化”があることは上にも述べたが、操作によって導かれる結論が自明なことならば、その導入は単にモデル・ビルディング過程を $\dot{\cdot}$ 一般化するのみかも知れない。実際、個々の素過程あるいは平均化すべき細密モデルが変動に対し線型的に応答する場合には、変動要素を無視しこれを細密モデルからの類推によって作成した“粗モデル”に代入しても、結果の概略はそれ程変化しないであろう。しかし、非線型性が問題となる時には、しばしばこの推測は大きな誤りをもたらす、このような状況をできる限り回避するためにもモデル・ビルディングに平均化操作の概念を取り入れる必要がある。

第Ⅱ編第2.3節では湖富栄養化モデルとして、個々の生物種の比較的短スケールの現象を対象に作成されたモデルを合成し、月～年スケールの結合系モデルを作成しているが、こうした操作には上に述べたような非線型性に基づく“平均（集合）化のわな”が随所にまちうける。その例として、式(2.3.1)に示した植物プランクトン動力学式を取り上げてみよう。今、論旨を明らかにするために流動・被食項は無視し、呼吸・沈降項を一括し R^P とすれば、対象式は次のようになる。

$$\frac{dP}{dt} = (G^P - R^P)P \quad (21)$$

上式中、 G^P 、 R^P は環境変動により種々の影響を受けている。それらのうち、あるものについては G^P 、 R^P 同定にあたって平均化されているが、そうでない成分も多い。その一つに光強度の日内変動がある。

モデルに使用した G^P の光強度依存性は現場藻類に 10～15 分の光照射を行

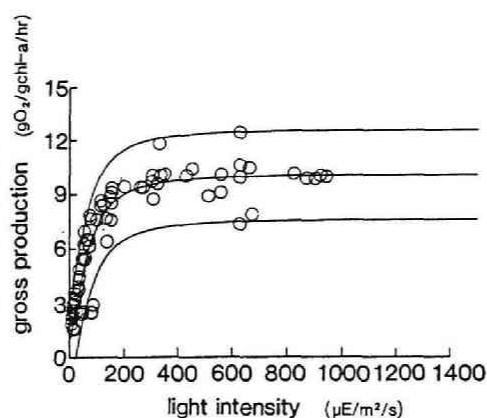


図3 光合成-光曲線

夏期6～9月期，Smith式に適合させる。図は光合成速度を $10 \text{ gO}_2/\text{g chl-a/hr}$ として正規化している。中央の線は ϕ (立ち上がり勾配) $= 0.09589 \text{ gO}_2/\text{g chl-a} / \text{hr} / \mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$ とした場合であり，上下の線は適合の95%信頼区間である。

った時の光合成速度を季節・優先種別に取りまとめたものである（例えば，図3）。光強度は日内でも年内でも極めて大きく変化しているから，上で求めた光合成-光依存性を利用する時の光強度外力としては観測に適合した間隔とすれば10分間隔程度の情報が必要となり，過重とも思われる情報量と労力を要求する。したがって日平均光強度 \bar{I} を利用することを考え，式(21)に日平均を行う。上付きバーで日平均を示すことにすれば

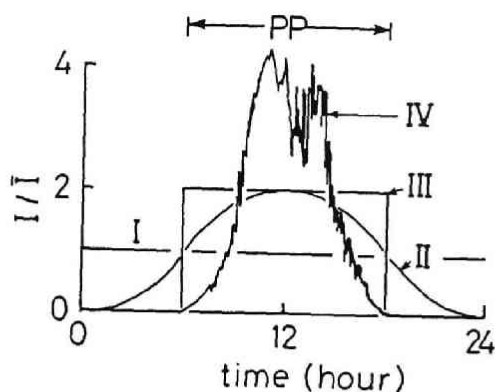
$$\frac{d \ln \bar{P}}{dt} = \bar{G}^P - \bar{R} \quad (22)$$

R に光強度変化が大きな影響がないとしても式(22)に \bar{I} を直接代入できるためには

$$\overline{\ln P} \cong \ln \bar{P} \quad (23)$$

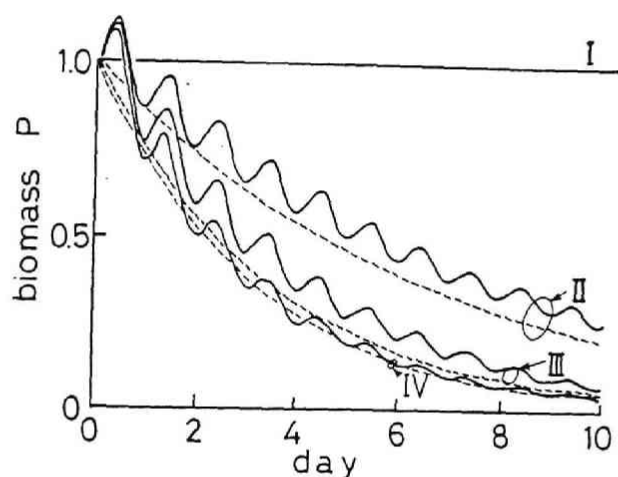
$$\bar{G}^P(I) \cong G^P(\bar{I}) \quad (24)$$

の条件が必要である。式(23)は P の日内変動が小さい時にはほぼ成立する。式(24)は $G^P(I)$ が I に対し線型であるか， I の日内変動が小さい時のみに成立する。これらの近似の影響を把握するためには，式(21)の直接的なシミュレーションがわかり易いが，図4(b)はそれを行った例である。すなわち，日内の I に関する変動パターンをいくつか仮定し計算結果に対する感度を調べた



(a) 設定パターン

PP (可照時間) は 0.5 日としている。



(b) 藻類成長の状況

実線は式(21)を積分したもの。点線は

$$\frac{dP}{dt} = (\bar{G}^P - R^P) P$$

を積分したもの。但し

$$G^P = \frac{1.8 I}{(I^2 + I_k^2)^{1/2}} \quad (1/\text{日}), \quad R^P = 0.9 \quad (1/\text{日})$$

$$I_k = \bar{I}$$

光呼吸、適応などの影響は無視している。

図4 光強度日内変動パターンの影響

ものである。図からわかるように感度はかなり大きく無視し得ない。図4(b)の点線は $\bar{G}^P(I)$ のみに変動を考慮し平均化した例である。第2.3節のモデルで

はこうした事情を考慮しパターンⅢによって平均化を行っている。すなわち可照時間外では総成長率を0とし

$$\overline{G^P(I)} = PP \cdot G^P(\bar{I}/PP) \quad (25)$$

によって $\overline{G^P(I)}$ を推定している (PP : 可照時間(日))。式(23)の仮定については何ら補正を行っていないが、式(25)の操作のみでもかなりの改良が見られることがわかる。

従来から行われている富栄養化モデルには日内変動を考慮せずに \bar{I} をそのまま式(21)に代入するものも多い。その場合、例えば、 $G^P(I)$ に Baly 式を仮定した時には

$$\overline{G^P(I)} = G^P(\bar{I}) = PHT_{max} \frac{\bar{I}}{\bar{I} + I_k} \quad (26)$$

であるが、式(25)の操作を行うなら

$$\overline{G^P(I)} = PHT_{max} PP \frac{\bar{I}}{\bar{I} + I_k PP} \quad (27)$$

となり、同じ Baly 式型が成立するものの最大成長率 PHT_{max} , 半飽和光強度 I_k に PP 倍の誤りが生ずることになる。

このように素過程にては明確な物理的意味をもっていたはずの各パラメータが平均化過程にて概念あるいは値自体を変容させる現象はしばしば発生する。また、そうした過程をたどることによってボックスモデルにて述べたように従来から提案されている粗モデルの妥当性を探る手掛りをつかむことも可能であろう。

例えば、式(21) G^P の栄養状態依存性のモデルとして第2.3節では Droop モデルを採用した。このモデルでは総成長速度は内部栄養塩濃度に依存し

$$G^P = PHT_{max} (1 - f_0/f) \quad (28)$$

によって表わされる。ここに f : 内部栄養塩濃度, f_0 : 最小内部栄養塩濃度で

ある。 f は成長と摂取のバランスによって定まり、表 2.4.2 (a)内部栄養塩収支式から

$$\frac{df}{dt} = U - G^p f \quad (29)$$

となる。 U は外部栄養塩摂取速度であり、表 2.4.2 (b)のモデルでは

$$U = U_{max} \frac{c^s}{c^s + k} \frac{f_{max} - f}{f_{max} - f_0} \quad (30)$$

である。ここに U_{max} ：最大摂取速度， k ：摂取半飽和定数， f_{max} ：最大内部栄養塩濃度であり， c^s ：外部栄養塩濃度とする。式(21)，(29)及び外部栄養塩収支を示す

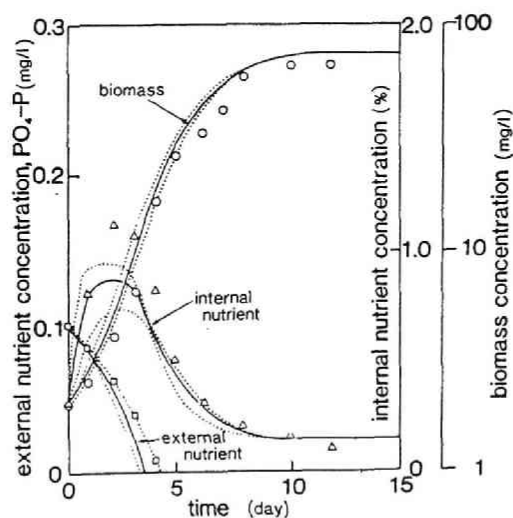


図5 藻類の栄養塩摂取・成長特性

*Microcystis aeruginosa*をリン 0.1 mg/ℓ含む培地にて培養した時の外部・内部リンの変化をシミュレートしたもの。前培養条件の相違によって本図の状況がかなり変化することが知られており、このようにして得られるパラメータの妥当性について疑問があるが、ここでは問題にしないことにする。
点線は U_{max} を 50, 200% と変化させた時を示す。

$$PHT_{max} = 0.72 \text{ (1/日)}, \quad U_{max} = 24 \text{ mg P/g DW/日},$$

$$k = 25 \text{ mg/m}^3, \quad f_{max} = 9.5 \text{ mg P/g DW}, \quad f_0 = 1.0$$

$$\text{mg P/g DW}$$

$$\frac{dS}{dt} = LOAD - UP \quad (31)$$

但し、 S ：外部栄養塩量， $LOAD$ ：負荷，は本論文第2編第2.3節富栄養化モデルでの外部栄養塩-藻類インタラクションの骨子であった。実際，式(28)，(30)のパラメータ決定にあたっては式(21)，(29)及び(31)で霞ヶ浦優先種の培養実験結果を追跡することによって定めている（例えば図5）。しかるに外部栄養塩と成長速度の間に式(29)のような段階を置くことは手間もかかるし（例えば図6），パラメータ数も増加させることになって望ましくない。そこで，式(21)，(29)及び(31)にGoldman¹⁴⁾，DiToro¹⁵⁾が考えたような内部栄養塩量動的平衡の仮定を導入してみる。これは藻類成長の時間スケールに比べ内部栄養塩量調整の時間スケールははるかに小さく式(29)は他の2式を取り扱う上で動的平衡に達していると仮定するもので次式に基づく。

$$U = G^p f \quad (32)$$

これを f について解くと

$$f = \frac{PHT_{max} k f_0 + \left\{ \left(\frac{f_{max}}{f_{max} - f_0} \right) U_{max} + PHT_{max} f_0 \right\} c^s}{PHT_{max} k + \left(\frac{U_{max}}{f_{max} - f_0} + PHT_{max} \right) c^s} \quad (33)$$

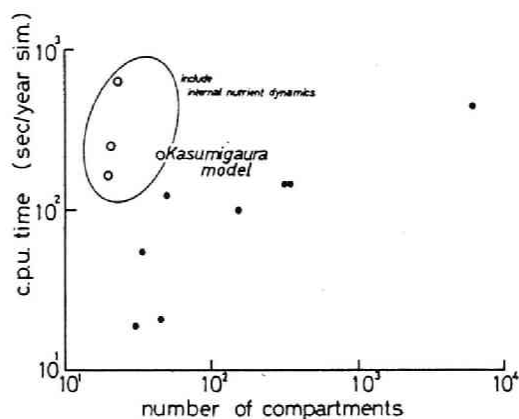


図6 湖生態モデルの計算時間

黒丸はモノー式を使用したもの。白丸は内部栄養塩動力学を考慮したもの

となる。式(28)に代入すれば

$$G^P = PHT'_{max} \frac{c^s}{c^s + k'} \quad (34)$$

但し

$$PHT'_{max} = PHT_{max} \frac{U_{max} (f_{max} - f_0)}{U_{max} f_{max} + PHT_{max} f_0 (f_{max} - f_0)} \quad (35)$$

$$k' = k \left[1 + \frac{U_{max} f_{max}}{PHT_{max} f_0 (f_{max} - f_0)} \right]^{-1}$$

なるモノー型のモデルを得る。式(35)と、図5で推定したパラメータ値を使用すれば培養実験で推定した名目最大成長速度 $PHT_{max} = 0.72$ (1/日), 及び摂取半飽和定数 $k = 25$ (mg/m³) は $PHT'_{max} = 0.65$ (1/日), $k' = 0.65$ (mg/m³) と変化する。これらの値が妥当であるかは本節の範囲外であるが、少くとも本モデルの立場では摂取半飽和定数 k と成長半飽和定数 k' を峻別する必要があることがわかる。

式(35)によれば, PHT_{max} と PHT'_{max} あるいは k と k' の関係は水温, 光強度などの影響を受け PHT_{max} が変わることによって絶えず変動しているが, その変動はシミュレーション結果に大きな影響を及ぼすであろうか。図7はそ

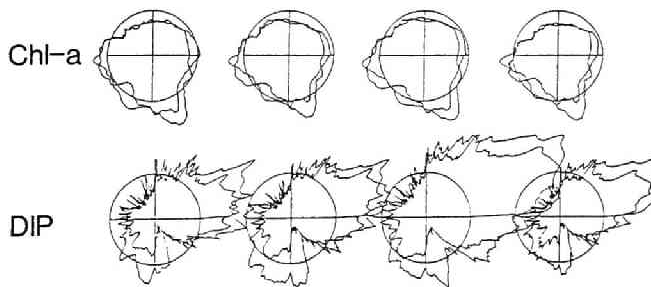


図7 霞ヶ浦モデル藻類動力学をモノー式で定式化した時の結果に対する感度。感度円を示す。1979～1980年。(モノーモデルの結果) / (原モデルの結果) を半径とし, 月日を回転角(1巡/年)として, 第1象限から左廻りに記したもの。左から高浜入, 土浦入, 湖心, 湖尻の各セクションを示す。

の検討例である。これは第Ⅱ編第2章霞ヶ浦モデルにて、 PHT'_{max}/PHT_{max} 比及び b'/b 比を計算期間内の PHT_{max} (計算値) の平均値により算出し、この近似の計算結果に対する感度を示したものである。これによれば、藻類量にはそれほど影響がでないものの外部栄養塩には大きな違いが生じていることになる。

(4) 観測と平均化のスケール¹³⁾

モデルを作成するにあたっては対象とする時空間スケールの設定が重要であり、それより小スケールの現象モデルとが、平均化操作によって結び付けられることは本節の主旨であるが、一方、観測・実験データにもこれとまったく並行な構造が存在する。但し、通常の観測方式では観測器の時空間定数と、その測定値によって表象する時空間スケールに隔たりがあり、このスケール間に存在する変動成分によっていわゆる“アリアジング(aliasing)”を起している場合が多い。その例を第Ⅱ編第2章で取り上げた霞ヶ浦水質観測データについて調べてみよう。

まず、図8は霞ヶ浦高崎沖地点(pt.1)にて観測されたクロロフィルーaデータである。変動には年スケールのものの他に短周期のものもかなり含まれ

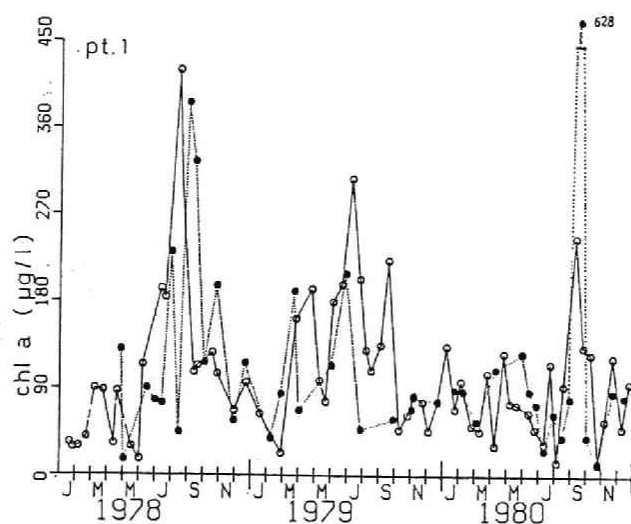


図8 クロロフィルーaの変動

高崎沖 (pt. 1), 白丸: 国立公害研究所観測, 黒丸: 茨城県内水面水産試験所観測

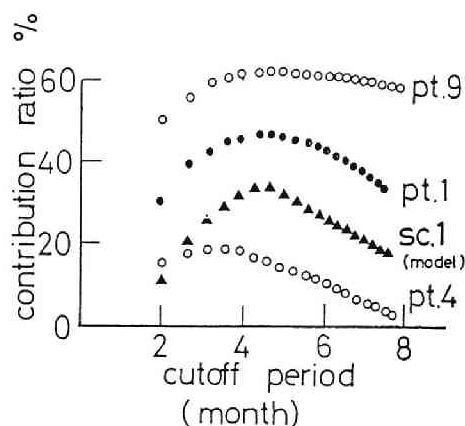


図9 移動平均と寄与率

クロロフィル a。国立公害研究所及び茨城県内水面水産試験所データを用い国立公害研究所が観測を行った時の両機関データ（内水試験データは線型内挿する）の寄与率を求めたもの。移動平均は第 i 回目の観測値を c_i とすると $(c_{i+1} + 2c_i + c_{i-1}) / 4$ の操作を繰り返し行ったものである。

ているが、このデータをもとにモデルを作成する立場からは、これらの変動のどの程度が“意味ある”かが重大な関心事となる。ここで“意味ある”とは何を指すかが問題となるが、その一例として、少くとも対象とした採水地点近傍で同程度の時間間隔の観測を行った時、両観測データに共通して含まれる成分を“意味ある”成分と考えることにする。今、意味ある成分と無意味な成分のパワー比を両データの寄与率によって推定することにし、観測時系列を順次、移動平均したのに対しこれを計算してみると図9のようになる。すなわち、寄与率は平滑化を進めるに従って増大し後に減少する。最初の増大はアリアジングの消去によるもの、後の減少は平滑化による有意味成分パワーの低下によるものと考えられる。

それではシミュレーション結果と観測データ間で同様の計算を行えばどうなるか。この場合にもやはり同じ傾向が示されており短周期成分のアリアジング効果が観察されるのである（図9）。

以上の結果より、少くとも霞ヶ浦クロロフィル a シミュレーションの再現性を検討するにあたり観測そのままの変動をモデルに要求することは不当である。かと言って図8の情報がまったく役に立たないと考えするのも不当であって図9に示す程度の内容とスケールをもった情報は観測によって得られており、かつ

モデルによって再現されなければならない。このように、モデルが対象とするスケール、観測によって得られる情報のスケール及びそれらの質は一致しなければならない。さもなければそれらの一致をみるまでどちらかが譲歩する必要がある。これはモデル構成及びそれに対応する観測、及びそれらの平均化（データ質と分解能には平均化により図9左側に見られるようなトレードオフが考えられる）にあたって十分注意すべきことであろう。

以上、本節においては本論文において対象とした幾つかの例をあげ、数理モデル開発における平均化操作の意義について論じた。環境系、とりわけ、水質変化過程のように物理的、化学的、生物学的現象及び人為的な摂動が不均質な場にて様々な時空間スケールで絡み合っている現象においては、解析の視点及び時空間スケールを明確に設定し、それを起点とした上で、関連諸現象のシミュレーションに努める必要がある。さらに、そうした作業はすこぶる恣意的・直観的なものであるからできるかぎり多くの断面での実験・観測による裏付けと、それを連結していく客観的な論理が求められている。平均化操作の必要性はまさにこの点にあり、重要かつ有効な役割を果たす。本論文にて示した幾つかのアプローチもこの認識に立ったものである。本節によってその重要性の認識を喚起するに些かも役立つ所があれば幸いである。

引用文献

- 1) 松岡譲(1984) : ボックスモデルに関する二, 三の検討. 水質汚濁研究
- 2) 例えば Kramers, H., and Alberda, G. (1953) : Frequency response analysis of continuous flow systems. Chem. Eng. Sci., 2, 173-181.
- 3) Levenspiel, O. (1962) : Chemical reaction engineering. Wiley, New York.
- 4) Ham, A., and Coe, H. S. (1918) : Calculation of extraction in continuous agitation. Chem. Met. Eng., 19, 663-666.
- 5) Shanahan, P., and Harleman, D. R. F. (1982) : Linked hydrodynamic and biogeochemical models of water quality in shallow lakes. Technical Report 268. Ralph M. Parsons Lab., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- 6) Phelps, E. and Velz, C. (1933) : Pollution of New York harbor. Sewage Works J., 5(1).
- 7) 宮内照勝(1960) : 流系操作と混合特性. 続新化学講座(14), 日刊工業新聞社, 東京.
- 8) 村岡浩爾・福島武彦(1983) : ボックスモデルを用いた水質予測方式に関する研究. 土木学会論文報告集, 336, 85-94.
- 9) Thomann, R. V. (1972) : Systems analysis and water quality management. McGraw-Hill, New York.
- 10) Paul, J. F., Richardson, W. L. et al. (1979) : Results of a joint USA/USSR hydrodynamic and transport modeling project. Environmental Research Laboratory. U. S. Environmental Protection Agency.
- 11) Spalding, D. B. (1972) : A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. Int. J. Num. Methods Eng., 4, 551-560.

- 12) Fisher, H. B., List, E. J. et al. (1979) : Mixing in inland and coastal waters. Academic Press, New York.
- 13) 松岡譲 (1984) : 霞ヶ浦富栄養化モデル. 国立公害研究所研究報告, 第 54 号.
- 14) Goldman, J. C. (1977) : Steady-state growth of phytoplankton in continuous culture : comparison of internal and external nutrient equations. J. Phycol., 13, 251-258.
- 15) DiToro, D. M. (1980) : Applicability of cellular equilibrium and Monod theory to phytoplankton growth kinetics. Ecol. Modelling, 8, 201-218.

